



TITLE:

# Dispersing Billiardsの半古典論(講義ノート)

AUTHOR(S):

原山, 卓久; 首藤, 啓

---

CITATION:

原山, 卓久 ...[et al]. Dispersing Billiardsの半古典論(講義ノート). 物性研究 1993, 61(3): 222-281

ISSUE DATE:

1993-12-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/95209>

RIGHT:

# Dispersing Billiards の半古典論<sup>\*)</sup>

早大理工 原山卓久  
分子研 首藤啓

(1993年12月20日受理)

## 目次

1 序	223
2 Dispersing Billiards	226
2.1 3つの円弧から成る Dispersing Billiards	226
2.2 Dispersing Billiards のカオス	228
2.3 周期軌道の記号列による表現	231
2.4 記号列に対応する周期軌道	233
3 エネルギー準位統計	237
4 Dispersing Billiards の半古典量子化	238
4.1 多重散乱展開法による Gutzwiller formula の導出	238
4.2 Gutzwiller formula の Dispersing Billiards への適用	246
4.3 Riemann-Siegel lookalike formula	250
4.4 Novel Quantization	253
5 境界要素法と半古典量子化の関係	254
5.1 境界要素法	254
5.2 境界要素法の半古典極限	257
6 周期軌道の統計的性質とその普遍性	259
7 結語	265
8 謝辞	266
9 付録	267
9.1 付録 A. 撞球系のモノドロミー行列	267
9.2 付録 B. 定常位相近似	271
9.3 付録 C.1. Riemann のゼータ関数との類推	272
9.4 付録 C.2. Riemann-Siegel lookalike formula	273
9.5 付録 D. 撞球台からはみ出るような定常な多角形	275
9.6 付録 E. トポロジカルエントロピー	278
10 参考文献	279

<sup>\*)</sup> 本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

# 1 序

天体の運動に代表されるように古典力学によって記述される現象は非常に多い。そのような系の未来は正準方程式を解くことによって完全に予測可能である。実際 1 自由度系や 2 体のケプラー運動など解ける例はたくさん知られている。それでは我々の身近で起こっていることがこのような決定論的法則に従っているにも関わらずほとんどすべて予測できないのはなぜだろうか。一つの解釈としては次のように考えられる。我々の日常では系の自由度が余りにも多いのですべての変数を制御することは不可能である。このためあたかもデタラメに日常が進行しているように見えている。このような解釈は統計力学を支えて来た基本的な考え方でもあるが、実は予測不可能であることにはもう一つの解釈がある。それは系の自由度の数が重要なのではなく系の非線形性により初期値の僅かな違いが時間と共に指数関数的に増大されるため未来がデタラメになるというものである。このことはポアンカレなど数学者にはおよそ百年前から知られており研究されてきたが、他の分野の科学者にはその重要性は認識されていなかった。1960 年代になって電子計算機の発達により正準方程式により決定される非線形な少数自由度系の運動を調べることが可能となったことで、物理学者などにたとえ少数自由度の系であってもデタラメとしか考えられない運動が起こることが再発見され、カオスとして研究されるようになったのである。特にエネルギーの散逸があるような場合や一次元写像系については現象論により明らかになったことが多く、物理サイドからの見方を取り入れることが成功している。それに比べてエネルギーが保存するような場合について解明されたことは大変少ない。

保存系においては、正準方程式に従う運動は大きく 3 つに分類できる。まず一つは解析的に解けてしまう可積分系と呼ばれる場合である (Arnold 1978)。先に挙げた 2 体のケプラー運動などはこの範疇に属している。可積分系では未来は完全に予測できるのである。また、これとは全く正反対にほとんどすべての軌道が確率的になってしまう強いカオスの系 (Anosov 系) がある (Arnold & Avez 1968)。そのような系では相空間に常に伸びる方向と縮む方向とを持つ双曲型の構造があるため、非常に近くまで接近した軌道同志でも引き伸ばしと折り畳みによって、その差は指数関数的に広がることになる。つまり系の未来が初期値に鋭敏に依存するということである。そのような場合初期値を無限の精度で決められない限り未来は確率的になってしまう。ところでこれら 2 つはいずれも非常に理想化された両極端の場合である。ほとんどすべての系はこれらの中間になっており、完全に予測可能な軌道とまったく確率的な軌道とが無限階層的な入れ子構造を成している。相空間に大変複雑な構造を持っている。そのような系は弱いカオス系、或いは近可積分系と呼ばれる範疇に属している。現実の系は大抵このような弱いカオス系であると考えてよい。この複雑な弱いカオス系については未だ完全には解明されていないことが少なくなく、今後明らかにされて行くことが期待される (Percival 1987, Mackay & Meiss 1987)

ところで、もっと小さな世界を記述するには量子力学を用いなくてはならない。量子力学系であっても、エネルギーがずっと大きくなれば古典力学による記述と同じ振る舞いをするという対応原理を考えると、古典系と量子系とは無関係ではないと考えられる。それでは古典系のカオスも量子系に反映するだろうか。このような観点から古典カオス系を量子化した系について詳しく研究され、可積分系を量子化した系との違いは次第に明らか

になった。例えばエネルギースペクトルの最近接間隔分布を数値的に調べると、ほとんどすべての可積分系ではポアソン分布によく一致するのに対して、ほとんどすべての強いカオス系ではウィーグナー分布によく一致する (Berry & Tabor 1977, Bohigas & Giannoni 1984, Bohigas, Giannoni & Schmit 1984). これは可積分系の場合理論的にはほぼ完全に説明されているが、カオス系についての理論は全く完成していない。その理由は可積分系の場合量子化した系においてエネルギーが非常に大きいとき、古典系の特徴的な量を用いて量子系を語るができるのに対して、カオス系ではそのようなことが今のところできないことにある。よく知られているように、1 自由度系ではエネルギーが非常に大きい領域において Wentzel-Krammer-Brillouin(WKB) 法によって半古典的に量子化できる (Fröman & Fröman 1966, Berry & Mount 1972). 多自由度になっても系が積分可能ならばこの方法を拡張した Einstein-Brillouin-Keller(EBK) 量子化法を用いて半古典的に量子化できるのである (Maslov 1972, Maslov & Fedoriuk 1981, Percival 1977, Berry 1983, Delos 1986). ところが非可積分系をこのように半古典的に量子化する方法は未だに完成していないのである。しかしそのような半古典理論の完成無しには、例えばカオス系のエネルギースペクトルの最近接間隔分布の理論の完成は期待できない。なぜならば、量子系に対する古典系としての性質の反映を見なければならぬので、古典系と量子系とをつなぐものが必要であり、そのようなものは今のところ半古典論しか考えられないからである。従ってカオス系の半古典量子化の完成は量子カオス系を理解するために必要不可欠なのである。

可積分系については量子力学の成立当初から半古典量子化が分かっていたのに対して (Einstein 1917), 非可積分系の量子化は長い間知られていなかったが、ようやく 1970 年代になって、そのような形式として周期軌道量子化が得られた (Gutzwiller 1971, Balian & Bloch 1972, 1974). これは EBK 量子化のように自由度の数だけ存在する各トラスを用いて 1 つの固有状態を量子化するのではなく、すべての周期軌道を用いてすべてのエネルギー準位を決定する方法である。しかし、一般に強いカオス系では軌道の種類が非常に豊富であるため、周期軌道をすべて知ることは大変困難である。周期軌道についての知見がない限り周期軌道量子化法も使いようがない。また、Gutzwiller formula の導出過程における近似計算の条件は、カオス系では破れている可能性があるので、半古典的量子化法が厳密な量子力学の与える結果を良く近似できるかは明らかではない。

弱いカオス系は未だ古典カオスとしての研究対象であるので、周期軌道量子化の適用、及び評価は困難である。そこで本論文では、古典系として強いカオスを示すことが数学的に厳密に知られている Dispersing Billiard 系 (Sinai 1970, 久保 1973 Bunimovich 1989) の半古典的量子化を試みる。まず第 2 章で境界の曲率が常に正である Dispersing Billiards と呼ばれる撞球台における粒子の示すカオティックな振る舞い、軌道の記号力学化及び周期軌道について議論する。第 3 章ではこの系におけるエネルギー準位統計について考察する。第 4 章では多重散乱展開の方法 (Balian & Bloch 1970) を 2 次元平面の場合に適用し、Gutzwiller formula を導出する。さらにこれを用いて実際に半古典量子化を行い、厳密な量子力学との比較により良い近似を与えることを数値的に示す (Harayama & Shudo 1992a). 1990 年代になって得られた Riemann-Siegel lookalike formula は、最近の定常状態の半古典論において特に重要である (Berry & Keating 1990, Keating 1992, Berry 1991). 素周期軌道についてのオイラー積で書かれた Gutzwiller のゼータ関数と素数についてのオイラー積で書かれ

た Riemann のゼータ関数には類似点が多い。そこで有限の半古典的領域で有限個の素数を用いて Riemann のゼータ関数の零点を与える Riemann-Siegel 公式との類推から、有限のエネルギーまでのエネルギー固有値をある有限個の素周期軌道で与える上の公式が予想されるのである。この方法が良い近似を与えることも数値的に示す。さらに、与えられた周期軌道を用いて多くのエネルギー準位を得る方法として考案された、Gutzwiller のゼータ関数の実部だけに注目する Novel Quantization (Aurich, Matthies, Sieber & Steiner 1992) の適用についても報告する (Harayama, Shudo & Shimizu 1993)。

ところで厳密な量子力学の与えるエネルギー固有値とはここでは境界要素法によって数値的に得られるもののことである。両者とも同じエネルギー固有値を得る方法ではあるが、この方法は周期軌道量子化とはまったく別の方法であるから、2つの異なる方法で得られるエネルギースペクトルが非常によく一致するのは大変不思議である。そこで第5章では境界要素法が半古典極限でどのようなものであるかを詳しく調べると実は周期軌道量子化とほとんど同じになることが示せ、境界要素法を用いた数値計算で行っていることは周期軌道量子化法とほとんど同じであることが分かることについて議論する (Harayama & Shudo 1992b)。

できるだけ少ない周期軌道で多くのエネルギー準位を得る方法に Curvature Expansion がある。これはゼータ関数のオイラー積を展開することで短い周期軌道だけで書かれるような形式を見出すもので、特に散乱問題では成功している (Cvitanovic & Eckhardt 1989)。これらの研究をさらに発展するには周期軌道についての知見が少なからず役立つだろう。また、Gutzwiller formula ではすべての周期軌道を用いなくてはならないので、有限個の周期軌道を用いて得られた結果がどこまでも有効とは限らない。これを調べるにはこれまで行われているよりもずっと多くの周期軌道を用いることが必要だが、それには周期軌道間の関係を見出し、長い周期軌道を短い周期軌道で構成する必要がある。そのためにも周期軌道の性質を詳しく調べることが重要である。しかし、モデルを限定し過ぎると詳細に分かるものの、その系の特殊性が強く現れてそのモデル以外に適用できない (Keating 1991a,b, Aurich, Bogomolny & Steiner 1991)。強いカオス系の半古典量子化に共通する困難の克服には、ある特殊な系だけが持つのではない強いカオス系に普遍的な面に焦点を絞った周期軌道についての知見を蓄積することが重要であると考えられるが、そのような研究は今まで全くなされていない。そこで第6章では Dispersing Billiards がパラメーターの値によらず常に強いカオスであることに注目し、その普遍的な性質をパラメーターを変化させることで見出す。その結果各周期軌道の間にはまるで乱数のように全く相関が見られず、統計的法則に従うことが分かる。

## 2 Dispersing Billiards

### 2.1 3つの円弧から成る Dispersing Billiards

一定のエネルギーを持った粒子が平面内のある領域  $D$  内では (古典) 自由粒子として運動し, 境界  $\partial D$  では入射角と反射角が等しいという反射の法則に従う力学系を考える. 境界の形に依存して様々な振る舞いを見せるこの粒子の運動を研究することを撞球 (Billiard) 問題といい, いくつかの厳密な結果が知られている. 古典力学系の性質が量子力学系のどのようなところに現れるかを知ることが目的なので, 古典系が詳しく調べられている撞球系は量子系として研究するのに最も適したものの1つである. ある撞球台  $D$  が与えられたとき, 対応する量子力学系の研究は, 境界  $\partial D$  に剛体壁があり領域  $D$  内では自由運動する粒子の時間発展, 或いは定常状態を調べることである. 定常状態の問題とは, 時間に依存しないシュレディンガー方程式 (ヘルムホルツ方程式)

$$\nabla^2 \psi(q) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(q) = 0, \quad q = (x, y) \in D \quad (2.1.1)$$

の固有値, 固有関数をディリクレ条件

$$\psi(q) = 0, \quad q \in \partial D \quad (2.1.2)$$

の下で調べることである. 対称性の高い特殊な撞球台でない限り, このような問題は解析的には解けないので数値的に調べる以外方法はない.

まず撞球台を選ぶことから始める. ここでの目的は古典系として見たとき非常に強いカオスを示す系の半古典量子化に関して知見を集めることであるから, 相空間の至るところ双曲型の構造を持ち, その上 Gutzwiller の跡公式を適用し易い, 即ち, 周期軌道を見つけ易いことが必要である. そこで図 2.1.1 のような 3 つの円弧で囲まれた撞球台を考えることにする. これは強いカオス系 (Anosov 系) であることが厳密に示された Dispersing Billiards と呼ばれる範疇に属する撞球台で (Sinai 1970), 可算無限個の記号を用いれば軌道を記号列で表すことができることも分かっている (Sinai & Bunimovich 1980, Sinai, Bunimovich & Chernov 1990). Dispersing Billiards とは, 境界が外向き法線ベクトルに対して凹であるような有限個の滑らかな曲線で作られた撞球台である. 我々はこのような境界成分として, 3 つの円弧を用いる.

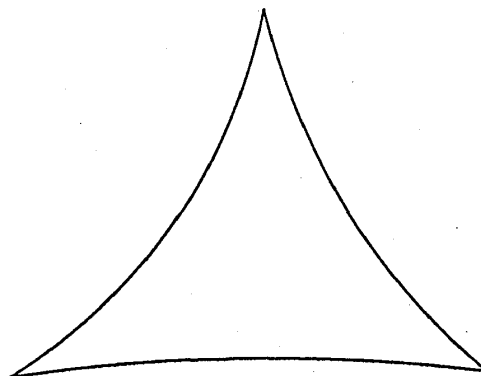


図 2.1.1. 3 つの円弧で囲まれた撞球台.

この撞球台の作り方は、以下の通りである。まず、図 2.1.2 の三角形 ABC を与える。次に 2 つの頂点を円弧で結ぶ。例えば辺 BC の下側で辺 BC の垂直二等分線上に中心を持つ円により円弧  $\widehat{BC}$  を作る。同様にして点 A と点 B、点 A と点 C とを円弧によって結ぶ。このようにして作った撞球台は境界の曲率が常に正なので、同じような軌道を描いていた粒子達でも壁に衝突する度に散乱され、すぐに全く異なる軌道を描くようになる。そのため粒子の未来ははじめにどこからどの方向に飛び出すかに鋭敏に依存する。ところで今の構成方法だとこの系にはいくつかのパラメーターがあるが、その値に関わらず常に強いカオス系である。但し、2 つの円弧が三角形の頂点で接する場合と各円弧の半径が無限に長くなる場合は例外であり、ここではそのようなことが起こらないようなパラメーターの値を選ぶ。前者にはどこまでも頂点に近付いて行く軌道があるため速度ベクトルの自己相関関数が代数的な減衰を示すことが知られており (Machta 1983)、後者は非可積分系ではあるが指数関数的な不安定性は持たない多角形の撞球問題となる (Sinai 1976, Boldrighini 1978, Gutskin 1987)。撞球台の大きさもパラメーターではあるが、エネルギーをスケールし直すことで大きさが変化する前の相似な撞球台と全く同じ系に帰着されるので、本質的にはパラメーターではない。従って、粒子の未来を左右するのは三角形 ABC の各頂点での角度と各円弧の半径 (境界の曲率) ということになる。ここでは三角形 ABC、弧  $\widehat{BC}$ 、弧  $\widehat{AC}$  は固定して弧  $\widehat{AB}$  の曲率だけを変化させることにする。このようにパラメーターを動かしても、強いカオス系であるという性質は常に満足されているので、パラメーターを変化させることで強いカオス系に普遍的な性質を見出せることが期待できる。強いカオス系での周期軌道の性質や半古典量子化がどの程度上手く機能するかはいくつか研究されているが、系の特殊性がどこかに反映しているかも知れないので、上で述べたような視点から系統的に調べてこれまで発見されていることがどこまで普遍的かを明らかにすることも重要である。

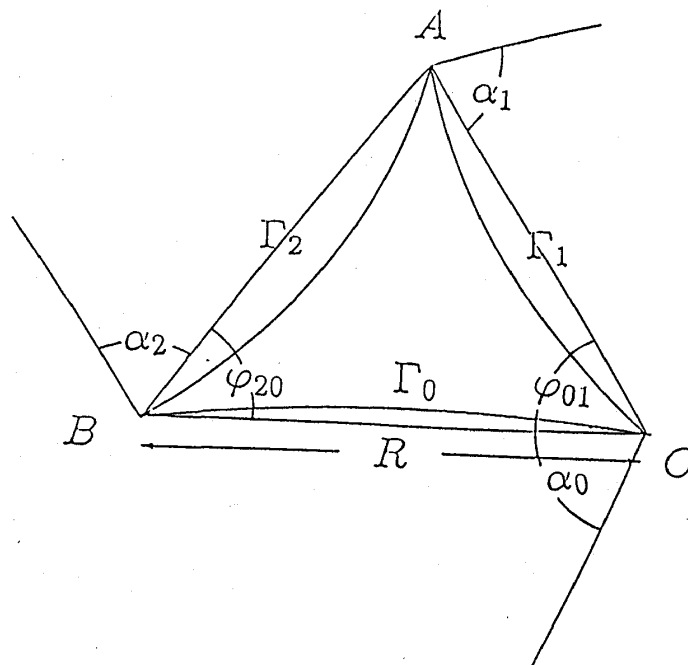


図 2.1.2. 3 つの円弧から成る撞球台の作り方.

## 2.2 Dispersing Billiards のカオス

図 2.2.1 に壁上の 1 点から出発した軌道の様子を示す。壁の形が例えば矩形であるならば、水平の壁にぶつかるときに鉛直方向の運動量の向きだけが逆になり、鉛直の壁にぶつかるときには水平方向の運動量の向きだけが逆になるので、どんな軌道であろうと 4 通りより多くの向きを作ることとはできない。その場合、運動は水平方向と鉛直方向に分解できる。即ち、1 自由度の問題に帰着されてしまい、粒子の未来は完全に予測可能である。このように各自由度の運動に分解できることが可積分系の特徴である。これに対して図 2.2.1 から明らかなように、典型的な非可積分系である Dispersing Billiards では、壁にぶつかる毎に運動量の向きが様々に変化することが分かる。このおかげで、軌道の種類は非常に豊富になる。そしてこの場合には、粒子の振る舞いを 1 自由度の運動の組み合わせでは表現できない。

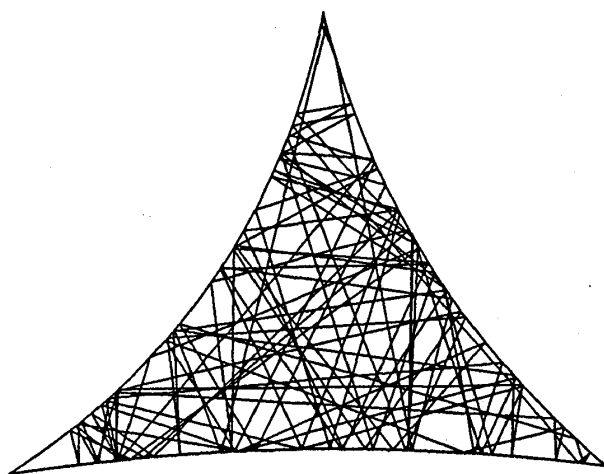


図 2.2.1. 撞球台上における粒子の軌道。

1 つの軌道が撞球台を埋め尽くすようにデタラメに動き回っている図 2.2.1 からこの系のエルゴード性や予測不可能性は十分理解できるが、自然に導かれるポアンカレ写像を用いると、相空間における混合性もはっきりと捉えられる。撞球問題では、壁上のある 1 点を始点として、壁に沿って測った衝突点の距離とその点での運動量の接線成分は正準座標と正準運動量になっている（付録 A）。これらを規格化したもの、即ちその距離の全周に対する比  $\eta$  と、衝突点での壁に対する外向き法線ベクトルと入射方向の成す角  $\varphi$  の正弦  $\sin(\varphi)$  の組を用いたものを Birkhoff 座標という。この座標系は平面となり、この平面に対して垂直方向に、ある衝突から次の衝突までの時間軸を取ると、この 3 つ組が Billiard 系の 3 次元定エネルギー超曲面となる。この空間で軌道は平面上のある点から鉛直に上って、あるところで平面上の別の点に移るということを繰り返すことになる。Birkhoff 座標は 3 次元定エネルギー超曲面の運動を 2 次元平面に落とすというポアンカレ写像になっている。この Birkhoff 座標では面積が運動による写像で保存するので、この空間での一様性か



らエルゴード性や混合性を見ることができる。Birkhoff 座標における図 2.2.2(a) のような初期点の集まりは, Dispersing Billiards の力学により, 図 2.2.2(b) のように引き伸ばされたり, 折り畳まれたりしながら攪拌され, やがては図 2.2.2(g) のように相空間全体に一様に広がって行く。

この引き伸ばしと折り畳みの機構が相空間のほとんどいたるところに存在していて, 軌道が確率的になることが厳密に証明されたものは, 抽象的でない力学系では Dispersing Billiards が初めてであった (Sinai 1970). その後もこの系は詳しく研究され, 可算無限個のマルコフ分割が存在すること (Bunimovich & Sinai 1980, 1986, Bunimovich, Sinai & Chernov 1990) や, そのためローレンツ気体の粒子はブラウン運動の法則に従うことなど厳密に知られていることが非常に多く (Bunimovich & Sinai 1980, Bunimovich 1989), 古典系としての性質の反映を量子系に見るのに非常に適している。

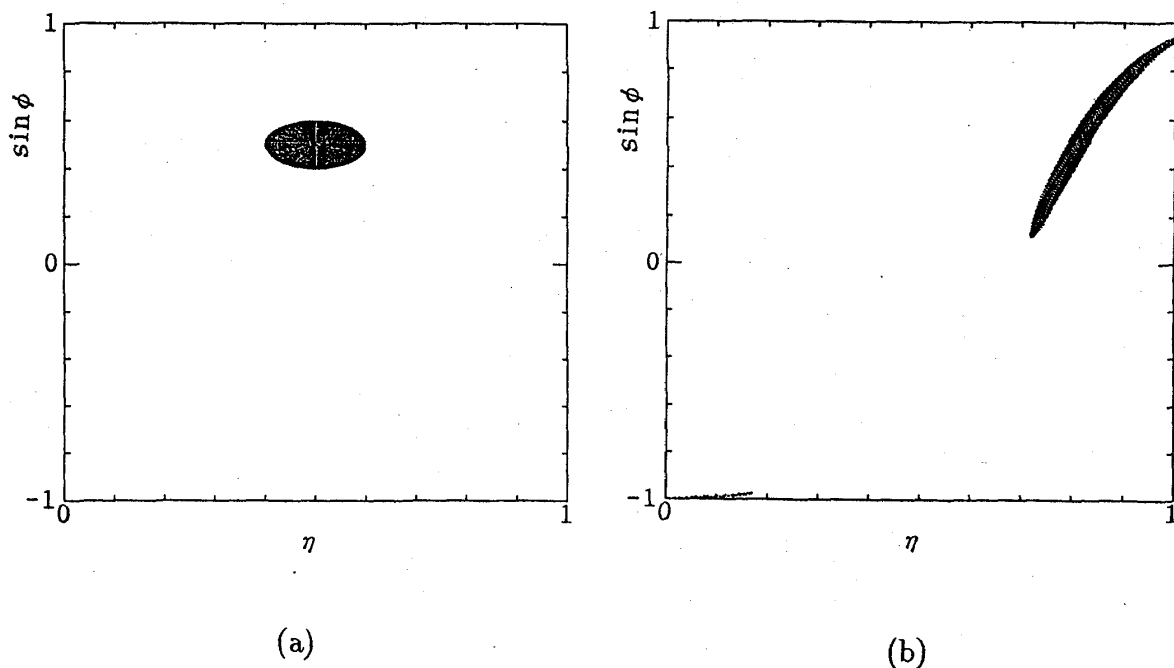
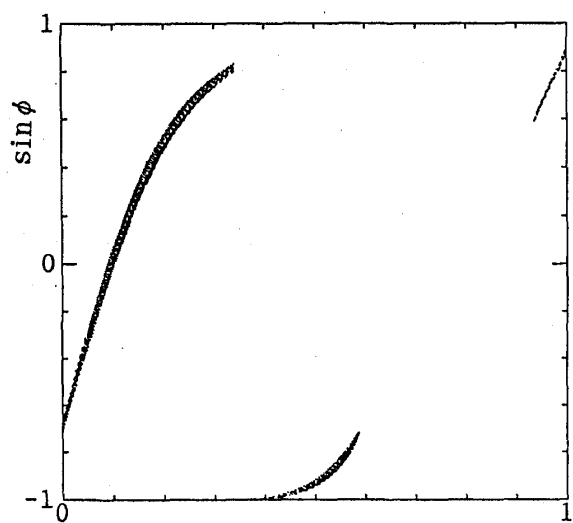
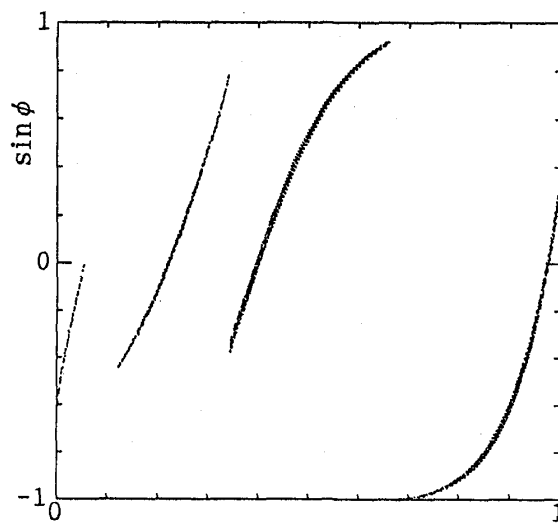


図 2.2.2. Birkhoff 座標でのカオスの発生機構.

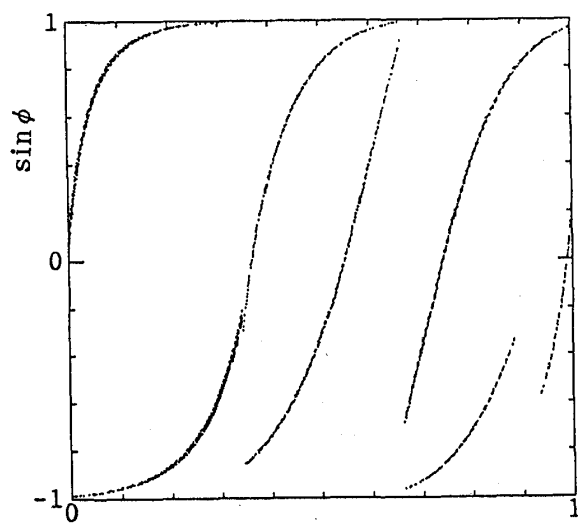
衝突回数=(a)0 (b)1 (c)2 (d)3 (e)4 (f)5 (g)100



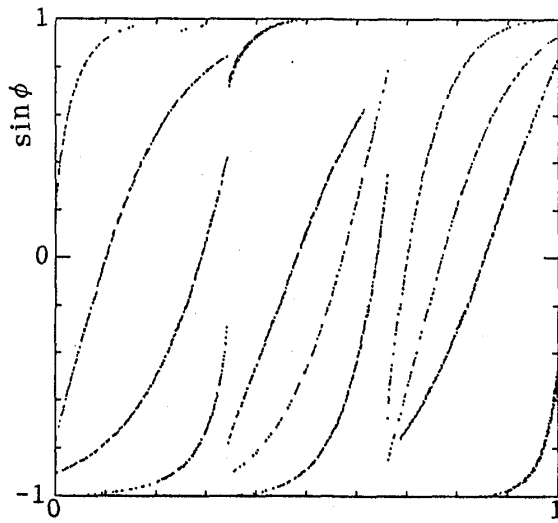
(c)



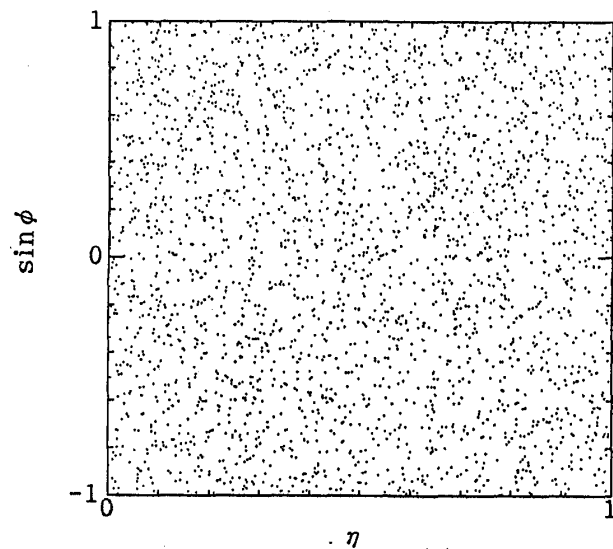
(d)



(e)



(f)



(g)

図 2.2.2.

## 2.3 周期軌道の記号列による表現

第2章で導入した3つの円弧より成る撞球台は, すべての周期軌道に対してそれぞれ1つの記号列を対応させることができる. 任意に与えた記号列に対応する周期軌道が必ず存在するわけではないが存在すれば唯一であるので, 周期軌道の種類に記号列により上限を与えることができる. このことによって取りこぼすことなく周期軌道を得ることができるのである.

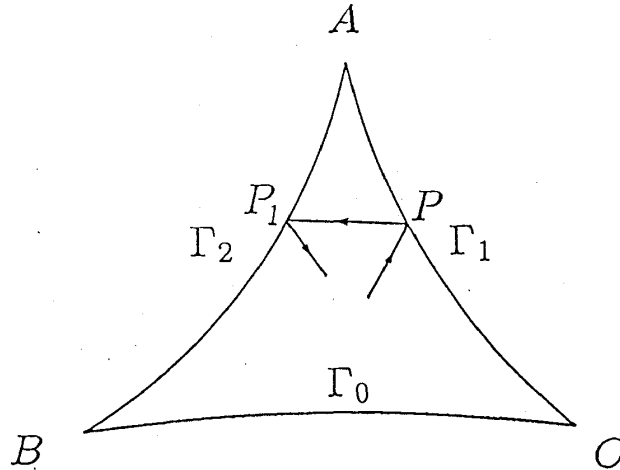


図 2.3.1. 軌道の記号列による表現.

図 2.3.1 のように軌道が各円弧  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$  に衝突することをそれぞれ記号 0, 1, 2 を用いて表すことにする. 従って, 軌道は記号 0, 1, 2 により作られる無限に長い記号列として表される. このような表現で軌道と記号列が 1 対 1 に対応することを説明する (Morita 1991). 各周期軌道  $\gamma$  は記号列

$$\xi(\gamma) \in \Sigma \quad (2.3.1)$$

により表現される. ここで,

$$\Sigma = \{ \xi = (\xi_j)_{j=-\infty}^{\infty} \in \prod_{j=-\infty}^{\infty} \{0, 1, 2\} \mid \xi_j \neq \xi_{j+1} \text{ for any } j \} \quad (2.3.2)$$

である.  $\xi_j$  と  $\xi_{j+1}$  が必ず異なるのは, 境界の曲率が至るところ正なので同じ円弧に続けて衝突できないからである.

図 2.3.1 のように弧  $\widehat{AC}$  に点  $P$  で衝突し, 次に弧  $\widehat{AB}$  に点  $P_1$  で衝突する軌道を考える. 弧  $\widehat{AC}$  に沿って測った点  $P$  と点  $C$  との距離を  $r$ , 点  $P$  での撞球台に対する内向き法線ベクトルと発射方向のなす角を  $\varphi$  とする. 同様に境界に沿って測った点  $P_1$  と点  $C$  との距離を  $r_1$ , 点  $P_1$  での内向き法線ベクトルと発射方向のなす角を  $\varphi_1$  とする. 幾何学的考察 (付録 A) から

$$\frac{dr_1}{dr} = -\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1} \left[ 1 + \frac{\tau}{\cos \varphi} \left( \frac{d\varphi}{dr} + k(r) \right) \right] \quad (2.3.3)$$

が成り立つことが分かる. ここで  $\tau$  は点  $P$  と点  $P_1$  との距離で,  $k(r)$  は点  $P$  における境界の曲率である.  $(r_0, \varphi_0), (r_1, \varphi_1), \dots, (r_n, \varphi_n)$  と次々に衝突する軌道では (2.3.3) より

$$\frac{dr_n}{dr_0} = \frac{dr_n}{dr_{n-1}} \frac{dr_{n-1}}{dr_{n-2}} \dots \frac{dr_1}{dr_0} = (-1)^n \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_n} \prod_{j=0}^{n-1} b_j \quad (2.3.4)$$

となる. ここで

$$b_j = 1 + \frac{\tau_j}{\cos \varphi_j} \left( \frac{d\varphi_j}{dr_j} + k(r_j) \right) \quad (2.3.5)$$

である. ところで

$$\frac{d\varphi_1}{dr_1} = k(r_1) + \cos \varphi_1 \left[ \tau + \cos \varphi \left( \frac{d\varphi}{dr} + k(r) \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (2.3.6)$$

であり,  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$  より  $\cos \varphi_j \geq 0, k(r_j) \geq 0$  だから,  $d\varphi_0/dr_0 \geq 0$  としておくと

$$\frac{d\varphi_j}{dr_j} \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3.7)$$

となるので

$$b_j \geq 1 + \eta, \quad \eta > 0, \quad (j = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.3.8)$$

を満足するような  $\eta$  が存在する. (2.3.4), (2.3.8) より

$$\left| \frac{dr_n}{dr_0} \right| \geq |\cos \varphi_0| (1 + \eta)^n \quad (2.3.9)$$

を得る. 今同じ円弧上においてその円弧に沿って測ると距離  $r(x, y)$  だけ離れている点  $x$  と点  $y$  とから 2 つの粒子が同時に発射されて,  $n$  回までに衝突する円弧の順序, 即ち, 記号列が等しいためには, 境界を作っている各円弧のうち最も短いものの長さを  $l$  とすると (2.3.9) より

$$r(x, y) \leq |\cos \varphi_0|^{-1} l (1 + \eta)^{-n} \quad (2.3.10)$$

でなければならない. 1 つの記号列に対して 2 つの異なる軌道が存在すると仮定しよう. この場合どこかの円弧上では異なる点で衝突するはずだからそれらの点をそれぞれ  $x_0, y_0$  とすれば, その円弧に沿って測ったそれら 2 点の距離  $r(x_0, y_0)$  は正である. ところが軌道は無限に長いから (2.3.10) で  $n \rightarrow \infty$  とすると, 境界に接するような軌道でなければ  $r(x_0, y_0) = 0$  となり仮定に矛盾する. 即ち, 境界に接するような軌道でなければ, 記号列と周期軌道は 1 対 1 に対応することが分かる. ところで境界に接するような周期軌道は例えば弧  $\widehat{AC}$  の半径を少し変化させるなど僅かに境界の形を変えると接しなくなるので, 即ち構造安定ではないので接していない状況を考えれば十分だから, 記号列に対して周期軌道は存在すれば唯一であることが分かる. 但し (2.3.2) のすべての記号列に対して必ず軌道が存在するとは限らない. 各円弧を作っている 3 つの円が互いにぶつからないように離れたような状況 (もちろんもはや束縛された系ではない) を考えると, どの円から他の 2 つの円を見ても

2 つとも満月に見えるくらい互いの距離が十分離れていれば, (2.3.2) で与えられる記号列に対応する周期軌道は必ず存在することが厳密に証明でき, その長さの分布についての詳しい解析や半古典散乱理論が可能となる (Morita 1991, Ikawa 1990a, b, Gasperd & Rice 1988a, b, c, Cvitanovic & Eckhardt 1989). しかし, 3 つの円が互いに近づくに従って存在できなくなる周期軌道が増えるのである. 我々の撞球台は 3 つの円が互いに交わってしまうほど近づいているので, 対応する周期軌道が存在しない記号列がかなり多いと考えられる. このことはマルコフ分割は構成可能だが可算無限個必要になってしまうことから推測できる (Sinai & Bunimovich 1980, Sinai, Bunimovich & Chernov 1990).

このようにして軌道が記号列で表現できると, 周期軌道の種類が記号列で制限できるので, 周期軌道を数値的に求める際には無駄が省かれ大変効率が良い.

## 2.4 記号列に対応する周期軌道

まず, 与えられた記号列に対応する円弧上の点を結んで出来る多角形のうち, 周の長さが最小になるものが周期軌道であることを証明する. 図 2.4.1 で点  $F'$  から発射され円弧上の点  $P$  で反射し点  $F$  に至る軌道を考える. 点  $P$  では入射角と反射角が等しいので, 点  $F$  と点  $F'$  とを焦点とする楕円で点  $P$  で境界に接するようなものが存在する.  $P$  とは異なる円弧上の点  $P'$  と点  $F$  とを結ぶ線分  $P'F$  と楕円との交点を  $Q$  とすると

$$\overline{P'F} + \overline{P'F'} = \overline{P'Q} + \overline{QF} + \overline{P'F'} > \overline{QF} + \overline{QF'} = \overline{PF} + \overline{PF'} \quad (2.4.1)$$

であるから, 点  $P$  は境界上の点と点  $F$ , 点  $F'$  とを結ぶ線分の長さが最小となるような点であることが分かる. 我々の撞球台の壁はすべて円弧から成っているので, 軌道であれば境界との衝突点について常に上の主張が成り立つ. 従って各頂点が記号列に対応する円弧上にある多角形のうち, その周の長さが最小のものが周期軌道であることが分かる. このような多角形では, 頂点を境界に沿って僅かに変化させても周の長さは変わらないので, 定常な多角形と呼ぶことにする (Balian & Bloch 1972). また証明から明らかなように, 境界は特に円弧で出来ていなくても曲率が至るところ正であれば上記のことが成り立つが, 壁に負曲率の部分を持つような撞球台では周期軌道は定常な多角形ではあるが必ずしも周の長さが最小とはならない.

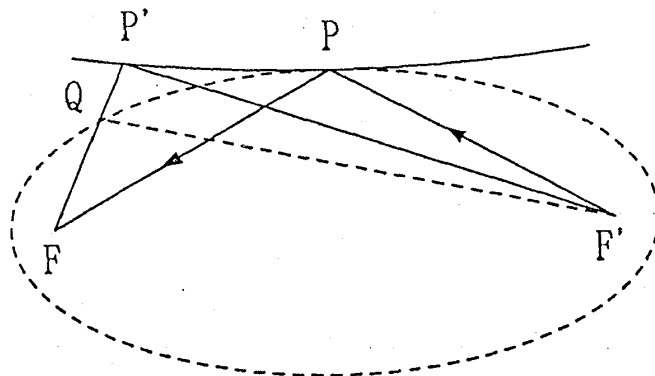


図 2.4.1. 周期軌道は壁上に頂点を持つ周の長さが最小の多角形である.

次に記号列  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  が与えられたとき対応する周期軌道を数値的に求める方法について説明する.  $c_j$  に対応する円弧上の点と  $c_{j+1}$  に対応する円弧上の点とを結ぶ線分の長さを  $L_{c_j c_{j+1}}$ , 境界に沿って測った頂点  $C$  と  $c_j$  に対応する円弧上の点との距離を  $x_{c_j}$  とする.  $x_{c_j}$  は頂点  $C$  を原点として反時計回りを正方向とする境界に沿って設けた座標を表すと考えてもよい. 周期軌道は定常な多角形であるから,

$$\frac{\partial}{\partial x_{c_j}} (L_{c_{j-1}c_j} + L_{c_j c_{j+1}}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad c_n = c_0, c_{n+1} = c_1 \quad (2.4.2)$$

である. 更に周の長さが最小である条件として

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{c_j}^2} (L_{c_{j-1}c_j} + L_{c_j c_{j+1}}) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad c_n = c_0, c_{n+1} = c_1 \quad (2.4.3)$$

を満足しなければならない. 素朴に考えると (2.4.2) は非線形連立方程式だから, 高次元のニュートン法 (ブレント法) によって解を求められるはずである (Chen, Meiss & Percival 1987). しかしそのような方法を用いると, 周の長さが  $x_{c_j}$  達の滑らかな関数でないために (2.4.3) が成立しないような偽の解が得られてしまう場合がある. もちろんそのようなときは新たに (2.4.2) を満たす解が得られるまで初期点を置き直せばよいが, 正しい解の非常に近いところに置かなければならないので大変能率が悪い. そこで次のような方法を用いる.

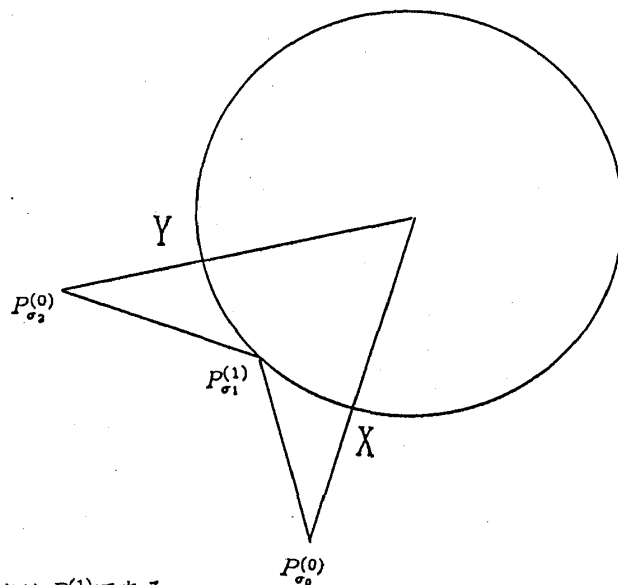


図 2.4.2. 弧  $XY$  上の定常な点は  $P_{c_1}^{(1)}$  である.

まず  $P_{c_j}^0 (j = 0, 1, \dots, n-1)$  を  $c_j$  に対応する円弧  $\Gamma_{c_j}$  の中点に置く. そして  $P_{c_0}^0$  と  $P_{c_2}^0$  を固定して  $P_{c_1}^1$  を (2.4.2) が成り立つ点として 1 次元のニュートン法を用いて解くことにより求める. ここで現れる 1 次元のニュートン法の解は, 図 2.4.2 に示してあるように円  $\Gamma_{c_1}$  の中心と  $P_{c_0}^0, P_{c_2}^0$  とを結ぶ線分が  $\Gamma_{c_1}$  と交わる点  $X, Y$  の間に必ず存在するので容易に得られる. 続いて  $P_{c_1}^1$  と  $P_{c_3}^0$  を固定して (2.4.2) が成り立つ点として  $P_{c_2}^1$  を求める. 同様の手続きを  $P_{c_0}^1$  が決まるまで繰り返す,  $P_{c_j}^1 (j = 0, 1, \dots, n-1)$  を得る. 次に  $\{P_{c_j}^0\}$  から  $\{P_{c_j}^1\}$  を求

めたのと全く同じ方法で  $\{P_{c_j}^1\}$  から  $\{P_{c_j}^2\}$  を求める.  $P_{c_j}^i$  達は常に撞球台の壁の上にあるので偽の解は決して現れない. これを繰り返して得られる

$$P_{c_j}^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{c_j}^k \quad (2.4.4)$$

がある点に収束するなら,  $n$  角形  $P_{c_0} P_{c_1} \cdots P_{c_{n-1}}$  は定常な多角形となり, 記号列  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  に対応する周期軌道が得られることになる. 我々の数値計算では  $|x_{c_j}^i - x_{c_j}^{i-1}|$  が  $10^{-9}$  以下になった時点で収束したと判断することにした. 記号列に対応する軌道が存在しないときは  $P_{c_j}$  が円弧と円弧の交点に収束して行くので,  $L_{c_j c_{j+1}}$  が  $10^{-6}$  以下になるなら軌道は存在しないと判断する. また (2.4.4) における  $k$  が 1000 を越える場合は対応する軌道の有無は判断不可能とし  $n = 3, 4, \dots, 20$  まで調べた. その結果すべての記号列の約 99% は収束し判断することができた.

ここで説明した方法を用いて実際に数値的に周期軌道を求めるのに, 図 2.1.2 でのパラメーターの値を以下のように設定した. 三角形 ABC の底辺の長さ  $R = 0.01$ ,  $\angle ACB = \varphi_{01} = \frac{1}{3}\pi$ ,  $\angle ABC = \varphi_{20} = \frac{13}{42}\pi$ ,  $\alpha_0 = \frac{5}{11}\pi$ ,  $\alpha_1 = \frac{2}{5}\pi$  としてこれらの値は一切変化させないことにする. 従って我々の撞球台でのカオスの強さは弧  $\widehat{AB}$  の曲率に関係しているパラメーター  $\alpha_2$  だけに依存することになる.  $\alpha_2$  を  $\frac{\pi}{2.7}$  から  $\frac{\pi}{2.1}$  まで変化させたときに得られる素な周期軌道についての結果を表 2.1 に示す. また時間反転したときに異なる軌道になっても幾何学的には同じ定常な多角形であるものは一つと数えた場合の結果を表 2.2 に示す. 表における  $n$  は軌道が出発点に最初に戻って来るまでに壁にぶつかる回数を表している.  $\alpha_2$  が小さいほど弧  $\widehat{AB}$  の曲率は大きくなる. 従って隣接する軌道はここにぶつかったとき  $\alpha_2$  が小さいほど速く互いに離れて行くのでより強いカオス系となる. 一般にカオスの強さは異なるトポロジーの軌道の多さ, 換言すると, 軌道の豊富さに関係している. つまり強いカオス系ほどいろいろな種類の軌道を持っているのである. 我々の系では軌道の豊富さとは対応する周期軌道が存在する記号列の数であるから, 表 2.1, 2.2 では  $\alpha_2$  が小さいほど周期軌道の数が多くなっているのである. 図 2.4.3 に周期軌道の例を示す. これらはすべて壁との衝突回数が 14 である. 図 2.4.3(a), (b) は時間反転した軌道と元の軌道が区別できる例であり, 図 2.4.3(c) は区別できない, 即ち, 時間反転しても同じ軌道になってしまう例である.

表 2.1. 周期軌道の個数.

$n$	$\pi/2.1$	$\pi/2.2$	$\pi/2.3$	$\pi/2.4$	$\pi/2.5$	$\pi/2.6$	$\pi/2.7$
3	2	2	2	2	2	2	2
4	3	3	3	3	3	3	3
5	6	6	6	6	6	6	6
6	1	4	5	7	8	8	8
7	6	10	10	10	14	16	16
8	11	13	17	17	18	20	22
9	20	22	26	36	36	38	38
10	25	36	46	60	61	62	68
11	50	66	82	92	100	110	122
12	82	102	135	151	167	192	205
13	136	188	248	280	318	350	378
14	228	311	406	492	569	613	676
15	368	528	706	862	1014	1118	1208
16	601	895	1223	1498	1780	1992	2186
17	1022	1568	2158	2698	3176	3606	3998
18	1710	2701	3751	4819	5685	6477	7236
19	2888	4638	6592	8598	10294	11782	13040
20	4850	7984	11605	15226	18525	21365	23683
	12009	19077	27021	34857	41776	47760	52895

表 2.2. 幾何学的な長さが異なる周期軌道の個数.

$n$	$\pi/2.1$	$\pi/2.2$	$\pi/2.3$	$\pi/2.4$	$\pi/2.5$	$\pi/2.6$	$\pi/2.7$
3	1	1	1	1	1	1	1
4	3	3	3	3	3	3	3
5	3	3	3	3	3	3	3
6	1	4	5	7	8	8	8
7	3	5	5	5	7	8	8
8	7	9	11	11	12	14	16
9	10	11	13	18	18	19	19
10	19	26	33	41	42	43	46
11	25	33	41	46	50	55	61
12	49	62	79	89	99	115	124
13	68	94	124	140	159	175	189
14	133	181	233	279	323	351	387
15	184	264	353	431	507	559	604
16	330	488	664	811	960	1074	1180
17	511	784	1079	1349	1588	1803	1999
18	914	1432	1975	2529	2982	3400	3794
19	1444	2319	3296	4299	5147	5891	6520
20	2521	4136	5984	7829	9519	10980	12193
	6226	9855	13902	17891	21428	24502	27155

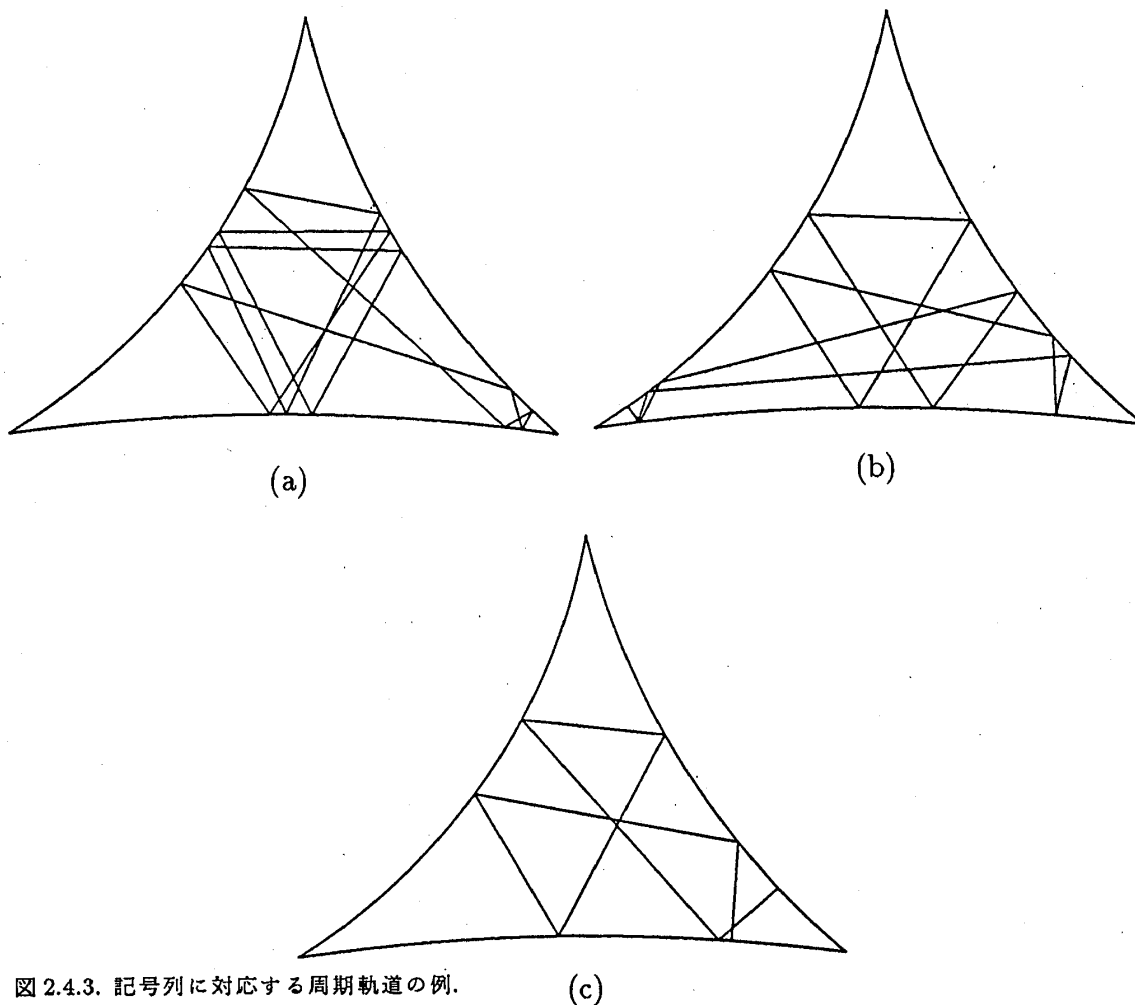


図 2.4.3. 記号列に対応する周期軌道の例.

(a) 1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,0

(b) 1,2,0,1,2,0,1,2,0,2,0,2,1,0

(c) 1,2,0,1,2,0,1,0,2,1,0,2,1,0



### 3 エネルギー準位統計

古典系カオスの量子系への反映として知られているものにエネルギー準位統計がある (Bohigas, Giannoni & Schmit 1984, 長谷川 1991). 普遍則を見るためには, ある古典系に特有の性質は取り除く必要がある. このためエネルギースペクトルに関しては, 平均レベル間隔を 1 にする. というのは, この操作を行わないと平均レベル間隔は  $N$  自由度系では

$$\bar{d}(E) \approx \frac{1}{h^N} \int dq \int dp \delta[E - H(q, p)] \quad (h \rightarrow 0)$$

となり (Baltès & Hilf 1976), エネルギー  $E$  以下の相空間の体積で決まるので個々の系で異なってしまう. 我々が注目するのは, 系の詳細には依存しないカオス系であることによる普遍則であるから, 1 つの系に固有な性質は取り除く. 例として Dispersing Billiard 系のエネルギー準位を数値的に求め, 平均レベル間隔を 1 にする操作を行った後に, レベルの最近接間隔分布を計算すると図 3 のようになる (清水 & 原山 1993). この図は, カオスの強さを制御するパラメーター  $\alpha_2$  の値が  $\pi/2.1, \pi/2.2, \dots, \pi/2.7$  の場合の最近接間隔分布の重ね書きである.  $\alpha_2$  の値が異なれば当然各エネルギー固有値も異なるが, それにも関わらず最近接間隔分布は半古典的エネルギー領域において 1 つの分布 — Wigner 分布で良く近似できる. つまり, ほとんどすべてのカオス系では系の詳細に関わらず, 半古典的エネルギー領域における最近接間隔分布は Wigner 分布に一致するのである (Bohigas, Giannoni & Schmit 1984, 長谷川 1991). これに対して, ほとんどすべての可積分系の半古典的エネルギー領域における最近接間隔分布はポアソン分布に一致する. (Bohigas, Giannoni & Schmit 1984, 長谷川 1991).

このような普遍則の理論について, 可積分系の場合は Berry と Tabor の試みがある (Berry & Tabor 1977). その解析において重要な役割を果たしたのは, WKB 法を多自由度系に拡張した EBK 量子化法である. これを用いて古典力学の情報が量子力学の情報に変換されることが重要である. 一方, 量子化されたカオス系の普遍則について理論的に解明されたことは大変少なく, 僅かに高次の相関についてのみであると言ってもよい (Berry 1985). その理由は, カオス系では古典力学の世界の言葉を, 量子力学の世界の言葉に翻訳するものが, 完全には作り上げられていないからである. 古典カオスの量子力学の世界への影響を解明することが我々の目標であるが, 2 つの世界をつなぐものを完成させることが戦略として必要不可欠である. そのようなものの候補としては今のところ半古典論しかない. そこで次の章で典型的なカオス系である Dispersing Billiards の半古典量子化について議論する.

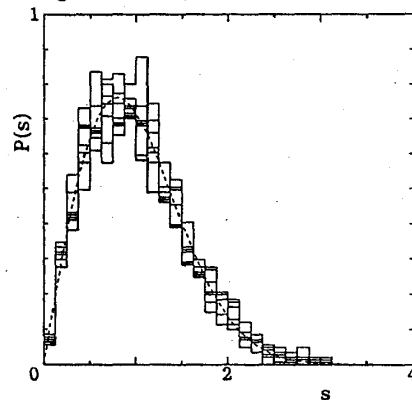


図 3. Dispersing Billiards における  
エネルギースペクトルの最近接間隔分布.

## 4 Dispersing Billiards の半古典量子化

### 4.1 多重散乱展開法による Gutzwiller formula の導出

古典系が可積分系であるときは EBK 量子化 (トーラス量子化) によって半古典的に量子化することができるが (Maslov 1972, Percival 1977, Berry 1983), 非可積分系では同じような半古典量子化はできないことは量子力学が成立した当時から知られていた (Einstein 1917). つまり前期量子論で重要な役割を果たしたボーア=ゾンマーフェルトの量子化条件が非可積分系には存在しないということである. この問題はようやく 1971 年になって Gutzwiller によって大きな進展を迎えた. 非可積分系でも古典系のすべての周期軌道を用いれば, 量子化した系の非常に高い固有エネルギーを予測できる公式を得たのである (Gutzwiller 1971). 彼はその後非等方ケプラー運動が強いカオスであることを数値的に示し (Gutzwiller 1977), 周期軌道を用いて公式が基底エネルギーから非常によい精度で成立することを初めて示した (Gutzwiller 1982). しかし一般にカオス系の周期軌道を求めることは大変困難なのでその後実際にこの公式を用いて量子化した例はそれほど多くはない. 我々の系ではカオスの強さをパラメーターによって変えられるので, ある特殊なパラメーターのときではなく一般に Gutzwiller formula がどのくらい良い近似であるかを試すことができる.

まず周期軌道量子化法について説明する. ある撞球台  $A$  が与えられたとき, 対応する量子力学系の研究は, 境界  $\partial A$  に剛体壁があり領域  $A$  内では自由運動する粒子の時間発展, 或いは定常状態を調べることである. それは時間に依存しないシュレディンガー方程式 (ヘルムホルツ方程式)

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \text{ in } A \quad (4.1.1)$$

とディリクレ条件

$$\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \text{ on } \partial A \quad (4.1.2)$$

によって記述される. ここで  $\mathbf{r} = (x, y)$  はデカルト座標,  $m$  は粒子の質量,  $\hbar$  はプランク定数,  $E$  は粒子のエネルギー固有値,  $\psi$  は  $E$  に対応する固有状態の波動関数である.

境界の形が円や矩形でないため, 粒子が古典力学としてカオティックな振る舞いをするとき, エネルギーが非常に大きい半古典的領域において, エネルギー固有値を古典力学の情報で計算する方法が Gutzwiller formula による周期軌道量子化法である. ここでは多重散乱展開の方法を適用してこの公式を導く (cf. Balian & Bloch 1970, 1972).

シュレディンガー方程式 (4.1.1) に対する時間に依存しないグリーン関数を

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) + \frac{2mE}{\hbar^2} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.1.3)$$

と

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = 0, \quad \mathbf{r} \text{ on } \partial A \quad (4.1.4)$$

で定義すると,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)$  は

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}) \psi_n^*(\mathbf{r}')}{(E - E_n) \frac{2m}{\hbar^2}} \quad (4.1.5)$$

と表すことができる. 従って状態密度  $\rho(E)$  は

$$\begin{aligned}\rho(E) &\equiv \sum_n \delta(E - E_n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_n \frac{1}{E - E_n + i\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int_A da [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E + i\epsilon)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \frac{2m}{\hbar^2}\end{aligned}\quad (4.1.6)$$

となる. (4.1.3) で境界条件の制約のない全空間に対する特解は

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = -\frac{1}{4} i H_0^{(1)} \left( \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right) \quad (4.1.7)$$

で与えられる. ここで  $H_0^{(1)}$  は第一種零次のハンケル関数である (Abramowitz & Stegun 1964).  $G$  を  $G_0$  と残りの部分  $G_1$  に分け,

$$G \equiv G_0 + G_1 \quad (4.1.8)$$

とすると,

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) + \frac{2mE}{\hbar^2} G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = 0 \quad (4.1.9)$$

と

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = -G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E), \quad \mathbf{r} \text{ on } \partial A \quad (4.1.10)$$

となる. ここで  $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)$  を

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = \oint ds_1 \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, s_1)}{\partial n_1} \mu(s_1, \mathbf{r}') \quad (4.1.11)$$

という形で表すことを考える. ここで,  $s_1$  は境界上にとったある始点から  $A$  の境界に沿って反時計まわりを正方向として測った長さで, 積分は境界に沿う線積分である. 簡単のためグリーン関数の引数であるエネルギーを省略した. また  $\frac{\partial}{\partial n_1} = \mathbf{n}_1 \cdot \nabla_{s_1}$  である. ここで,  $\mathbf{n}_1$  は  $s_1$  における  $A$  に対して外向きの法線ベクトルである. (4.1.11) の  $\mu(s_1, \mathbf{r}')$  を求める.  $\mathbf{r}$  を  $A$  内の点から境界上の点  $s_2$  に近づける極限を  $G_1^{(+)}(s_2, \mathbf{r}')$ , (4.1.11) で  $\mathbf{r}$  が境界上の点  $s_2$  としたものを  $G_1^{(0)}(s_2, \mathbf{r}')$  とする. 任意の関数  $q(\mathbf{r})$  に対して  $\nabla^2 q(\mathbf{r}) + \frac{2mE}{\hbar^2} q(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$  とするとグリーン関数の定理より

$$\oint ds' \left\{ q(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_{\mathbf{r}'}} - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial q(\mathbf{r}')}{\partial n_{\mathbf{r}'}} \right\} + \int_A da' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') = \begin{cases} q(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \text{ in } A \\ \frac{1}{2} q(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \text{ on } \partial A \\ 0 & \mathbf{r} \text{ outside } A \end{cases} \quad (4.1.12)$$

となる. よって,

$$G_1^{(+)}(s_2, \mathbf{r}') - G_1^{(0)}(s_2, \mathbf{r}') = \frac{1}{2} \mu(s_2, \mathbf{r}') \quad (4.1.13)$$

を得る. また,  $G$  の連続性から

$$0 = G(s_2, \mathbf{r}') = G_1^{(+)}(s_2, \mathbf{r}') + G_0(s_2, \mathbf{r}') \quad (4.1.14)$$

であるから,

$$\mu(s_2, \mathbf{r}') = -2G_0(s_2, \mathbf{r}') - 2 \oint ds_1 \frac{\partial G_0(s_2, s_1)}{\partial n_1} \mu(s_1, \mathbf{r}') \quad (4.1.15)$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned} \mu(s_1, \mathbf{r}') &= -2G_0(s_1, \mathbf{r}') - 2 \oint ds_2 \frac{\partial G_0(s_1, s_2)}{\partial n_2} \mu(s_2, \mathbf{r}') \\ &= -2G_0(s_1, \mathbf{r}') + 2^2 \oint ds_2 \frac{\partial G_0(s_1, s_2)}{\partial n_2} G_0(s_2, \mathbf{r}') \\ &\quad - 2^3 \oint \oint ds_2 ds_3 \frac{\partial G_0(s_1, s_2)}{\partial n_2} \frac{\partial G_0(s_2, s_3)}{\partial n_3} G_0(s_3, \mathbf{r}') + \dots \\ &\quad + (-2)^N \oint \dots \oint ds_2 \dots ds_N \frac{\partial G_0(s_1, s_2)}{\partial n_2} \dots \frac{\partial G_0(s_{N-1}, s_N)}{\partial n_N} G_0(s_N, \mathbf{r}') + \dots \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

となる.(4.1.16) を (4.1.11) に代入して (4.1.8) より

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) &= G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - 2 \oint ds_1 \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, s_1)}{\partial n_1} G_0(s_1, \mathbf{r}') \\ &\quad + (-2)^2 \oint \oint ds_1 ds_2 \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, s_1)}{\partial n_1} \frac{\partial G_0(s_1, s_2)}{\partial n_2} G_0(s_2, \mathbf{r}') \\ &\quad + (-2)^3 \oint \oint \oint ds_1 ds_2 ds_3 \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, s_1)}{\partial n_1} \frac{\partial G_0(s_1, s_2)}{\partial n_2} \frac{\partial G_0(s_2, s_3)}{\partial n_3} G_0(s_3, \mathbf{r}') + \dots \\ &\quad + (-2)^N \oint \dots \oint ds_1 ds_2 \dots ds_N \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, s_1)}{\partial n_1} \frac{\partial G_0(s_1, s_2)}{\partial n_2} \dots \frac{\partial G_0(s_{N-1}, s_N)}{\partial n_N} G_0(s_N, \mathbf{r}') + \dots \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

となる. 従って, (4.1.6) より,

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \frac{mA}{2\pi\hbar^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^N \times \\ &\quad \text{Im} \int da \oint \dots \oint ds_1 ds_2 \dots ds_N \left[ \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, s_1)}{\partial n_1} \frac{\partial G_0(s_1, s_2)}{\partial n_2} \dots \frac{\partial G_0(s_{N-1}, s_N)}{\partial n_N} G_0(s_N, \mathbf{r}') \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \frac{2m}{\hbar^2} \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

を得る. ここで特に混乱しないと考え,  $A$  の面積を  $A$  とした.  $\tau(s, s')$  を境界  $\partial A$  上の点  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  とのユークリッド距離

$$\tau(s, s') \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (4.1.19)$$

とし,  $\varphi(s', s)$  を  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  と  $A$  に対して外向きの法線ベクトル  $\mathbf{n}$  とのなす角 (反時計まわりを正方向) とすると図 4.1.1 より

$$\frac{\partial G_0}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G_0 = \cos \varphi(s', s) \frac{\partial G_0}{\partial \tau} \quad (4.1.20)$$

である. 次に (4.1.18) の右辺の第 2 項の半古典極限 ( $\hbar \rightarrow 0$ ) を考える. 以下では撞球台の形について次のようなものに限ることにする. この系を古典系として考えるならば非常に

強いカオス系でありすべての周期軌道は不安定な双曲型で、安定でも不安定でもないものや楕円型のは全く存在しない。  $z$  を変数とするハンケル関数では  $z$  が十分大きいとき漸近形は

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-(2\nu+1)\frac{\pi}{4})} \quad (4.1.21)$$

となる。これを用いると、この系のエネルギーが非常に大きいときには

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, s_1)}{\partial n_1} \frac{\partial G_0(s_1, s_2)}{\partial n_2} \dots \frac{\partial G_0(s_{N-1}, s_N)}{\partial n_N} G_0(s_N, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \approx \\ & -\frac{1}{4} i e^{-\frac{1}{4}(N+1)\pi i} \left( \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \right)^N \left( \prod_{j=1}^{N+1} \cos \varphi(s_{j-1}, s_j) \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi \sqrt{2mE} \tau(s_{j-1}, s_j)}} \right) \exp \left( i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} l(s_0, \dots, s_N) \right) \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

となる。ここで、 $s_0 = s_{N+1}$  はともに点  $\mathbf{r}$  を表す。  $l(s_0, \dots, s_N) = \sum_{j=1}^{N+1} \tau(s_{j-1}, s_j)$  は  $s_0$  から  $s_1, s_2, \dots, s_N, s_0$  をこの順に線分でつないだ多角形の周の長さである。また、 $\cos \varphi(s_N, s_{N+1}) = 1$  とする。(4.1.18) の右辺において周期軌道上の一点  $\mathbf{r}$  の近くで、周期軌道に沿う方向と垂直な方向に座標系を取り、それぞれ  $s_a, s_0$  で表す。このとき、 $\int da = \int ds_a \int ds_0$  である。よって積分を定常位相近似によって評価すると

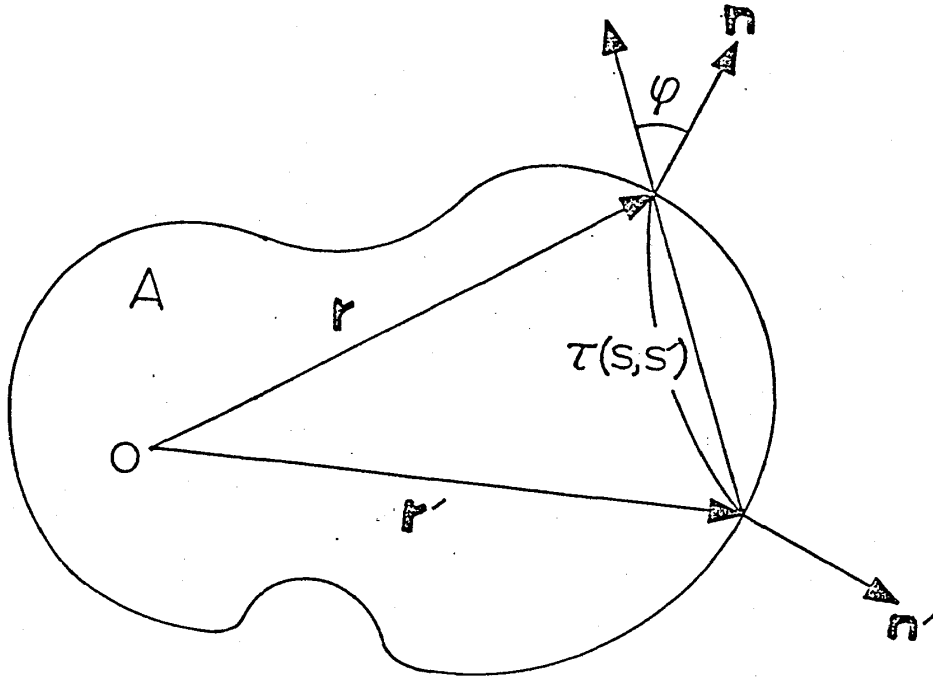


図 4.1.1. 法線方向の微分。

$$\begin{aligned}
 & \int ds_0 \oint \cdots \oint ds_1 ds_2 \cdots ds_N \left[ \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, s_1)}{\partial n_1} \frac{\partial G_0(s_1, s_2)}{\partial n_2} \cdots \frac{\partial G_0(s_{N-1}, s_N)}{\partial n_N} G_0(s_N, \mathbf{r}') \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \frac{2m}{\hbar^2} \\
 & \approx - \left( \frac{1}{2} \right)^N \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}} \times \\
 & \sum_{\text{s.p.}} \left( \prod_{j=1}^{N+1} \frac{\cos \varphi(s_{j-1}^*, s_j^*)}{\sqrt{\tau(s_{j-1}^*, s_j^*)}} \right) \frac{1}{\sqrt{|\det W(N+1)|}} \exp \left( i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} l(s_0^*, \dots, s_N^*) - \frac{\sigma}{2} \pi i \right)
 \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

となる。ここで  $\sum_{\text{s.p.}}$  は後で説明するすべての定常な多角形について和を取ることを表す。  
また  $W(N+1)$ ,  $\sigma$  はそれぞれ

$$W_{ij}(N+1) = \frac{\partial^2 l}{\partial s_i \partial s_j}(s_0^*, s_1^*, \dots, s_N^*), \tag{4.1.24}$$

$$\sigma = W(N+1) \text{ の負の固有値の個数} \tag{4.1.25}$$

である。さらに  $l$  が  $s_0^*, s_1^*, \dots, s_N^*$  で定常であるという条件

$$\frac{\partial l}{\partial s_j}(s_0^*, s_1^*, \dots, s_N^*) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \tag{4.1.26}$$

が満足されている。これは

$$\frac{\partial \tau(s_{j-1}^*, s_j^*)}{\partial s_j} + \frac{\partial \tau(s_j^*, s_{j+1}^*)}{\partial s_j} = 0 \tag{4.1.27}$$

と書くことができる。簡単な幾何学的考察から

$$\frac{\partial \tau(s_{j-1}^*, s_j^*)}{\partial s_j} = \sin \varphi(s_{j-1}^*, s_j^*) \tag{4.1.28}$$

$$\frac{\partial \tau(s_j^*, s_{j+1}^*)}{\partial s_j} = -\sin \varphi(s_{j+1}^*, s_j^*) \tag{4.1.29}$$

という関係が成り立つことが分かる。したがって (4.1.27) は

$$\sin \varphi(s_{j-1}^*, s_j^*) = -\sin \varphi(s_{j+1}^*, s_j^*) \tag{4.1.30}$$

となる。 $\varphi$  を  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  に制限すると

$$\varphi(s_{j-1}^*, s_j^*) = -\varphi(s_{j+1}^*, s_j^*) \tag{4.1.31}$$

を得る。これ以外の (4.1.30) の解である定常な多角形、即ち、その一部が撞球台からはみ出しているものは (4.1.23) に寄与しないことを付録 D に示す。(4.1.31) より  $s_j^*$  を  $j$  の順に結

んだ線分の作る多角形は、各頂点  $s_i^*$  で入射角と反射角が等しいという反射の法則を満たす定常な多角形である (Balian & Bloch 1972). 但し、 $s_0$  では  $\varphi(s_N^*, s_0^*) = -\varphi(s_0^*, s_1^*) = 0$  であるから、この多角形はある辺に  $s_0$  を含む。つまりこれは古典系、即ち撞球系の周期軌道であることが分かる。

$W(N+1)$  と古典力学的運動としての周期軌道の安定性を表すモノドロミー行列との関係について考察する (cf. Mackay & Meiss 1983, Ikeda 1992). モノドロミー行列とは、ポアンカレ写像を周期軌道の回りで線形化した写像を表現する行列である (付録 A). まず (4.1.10) に対して変分を考えると

$$\frac{\partial^2 \tau(s_{i-1}, s_i)}{\partial s_{i-1} \partial s_i} \delta s_{i-1} + \left( \frac{\partial^2 \tau(s_{i-1}, s_i)}{\partial s_i^2} + \frac{\partial^2 \tau(s_i, s_{i+1})}{\partial s_i^2} \right) \delta s_i + \frac{\partial^2 \tau(s_i, s_{i+1})}{\partial s_{i+1} \partial s_i} \delta s_{i+1} = 0 \quad (4.1.32)$$

となる。ここで簡単のため \* を省略した  $s_0, s_1, \dots, s_N$  は (4.1.26) で決まる運動法則に従う周期軌道であるから、 $\delta s_0$  を固有値  $\lambda$  の固有ベクトル方向に取れば、 $\delta s_{i+N+1} = \lambda \delta s_i$  となるので  $\delta s_{N+1} = \lambda \delta s_0, \delta s_{-1} = \frac{1}{\lambda} \delta s_N$  であることに注意すると (4.1.32) より

$$M(\lambda) \delta s = 0 \quad (4.1.33)$$

が成り立つ。ここで

$$M(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial s_0^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial s_0 \partial s_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 l}{\partial s_0 \partial s_N} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial s_1 \partial s_0} & \frac{\partial^2 l}{\partial s_1^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial s_1 \partial s_2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 l}{\partial s_2 \partial s_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial s_2^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial s_2 \partial s_3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial^2 l}{\partial s_{N-2} \partial s_{N-1}} & \frac{\partial^2 l}{\partial s_{N-1}^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial s_{N-1} \partial s_N} \\ \lambda \frac{\partial^2 l}{\partial s_N \partial s_0} & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial^2 l}{\partial s_N \partial s_{N-1}} & \frac{\partial^2 l}{\partial s_N^2} \end{pmatrix} \quad (4.1.34)$$

$$\delta s \equiv \begin{pmatrix} \delta s_0 \\ \delta s_1 \\ \vdots \\ \delta s_{N-1} \\ \delta s_N \end{pmatrix} \quad (4.1.35)$$

である。したがって (4.1.33) が自明でない解を持つために

$$\det M(\lambda) = 0 \quad (4.1.36)$$

となる。ところで  $\det M(\lambda)$  を展開して整理すると

$$\det M(\lambda) = \det M(1) + (\lambda - 1)(-1)^N \prod_{i=0}^N \frac{\partial^2 l}{\partial s_i \partial s_{i+1}} + \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (-1)^N \prod_{i=0}^N \frac{\partial^2 l}{\partial s_{i+1} \partial s_i}$$

$$= \det M(1) - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2\right) \prod_{i=0}^N \left(-\frac{\partial^2 l}{\partial s_{i+1} \partial s_i}\right) \quad (4.1.37)$$

となるので, (4.1.36) より

$$\det M(1) = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2\right) \prod_{i=0}^N \left(-\frac{\partial^2 l}{\partial s_{i+1} \partial s_i}\right) \quad (4.1.38)$$

を得る. したがって, この定常な多角形を周期軌道と考えたときのモノドロミー行列を  $M$  により

$$\det M(1) = (\text{Tr} M - 2) \prod_{i=1}^{N+1} \left(-\frac{\partial^2 l}{\partial s_{i+1} \partial s_i}\right) \quad (4.1.39)$$

となる. ここで (A.18) を用いた. ところで (4.1.28), (4.1.29) より

$$\frac{\partial^2 l}{\partial s_j \partial s_{j+1}} = \frac{\cos \varphi(s_j^*, s_{j+1}^*) \cos \varphi(s_{j+1}^*, s_{j+2}^*)}{\tau(s_j^*, s_{j+1}^*)} \quad (4.1.40)$$

を得る. ここで  $\kappa(s_j)$  は点  $s_j$  において内向き法線ベクトルで測った境界の曲率である.

(4.1.23) の振幅の自乗を  $B(n)$  とする. 即ち,

$$B(n) \equiv \left( \prod_{j=1}^n \frac{\tau(s_j^*, s_{j+1}^*)}{\cos^2 \varphi(s_j^*, s_{j+1}^*)} \right) \det W(N+1) \quad (4.1.41)$$

である.

(4.1.39), (4.1.41) 及び  $W(N+1) = M(1)$  より,

$$B(N+1) = \frac{\det W(N+1)}{\prod_{i=1}^{N+1} \frac{\partial^2 l}{\partial s_i \partial s_{i+1}}} = (-1)^{N+1} (\text{Tr} M - 2) \quad (4.1.42)$$

を得る. これより,  $B(N+1)$  は定常な多角形にのみに依存し,  $s_0$  には依らないことも分かる.

次に  $\sigma$  と定常な多角形との関係について議論する.  $\sigma$  は  $W(N+1)$  の負の固有値の個数である.  $W$  は対称行列であるから, 二次超曲面の理論が適用することができるので,  $\sigma$  は列

$$1, V(1), V(2), \dots, V(N), \det W(N+1) \quad (4.1.43)$$

の符号変化の個数に等しい. ここで,  $\det W(N+1)$  とモノドロミー行列の関係の導出と同様の計算により

$$V(k) = \left( \prod_{j=N-k+1}^N \frac{\cos^2 \varphi(s_j^*, s_{j+1}^*)}{\tau(s_j^*, s_{j+1}^*)} \right) (-1)^k \frac{1}{\tau_{N-k, N-k+1}} \frac{\partial s_N}{\partial \varphi_{N-k}} \quad (4.1.44)$$

となる.  $\frac{\partial s_j}{\partial \varphi_{j-1}}$  は  $j-1$  番目の衝突と  $j$  番目の衝突の間に焦点がないと負の値となるので, 符号変化の個数, 即ち,  $\sigma$  は定常な多角形の焦点の個数に等しいことが分かる.



$\det W(N+1), l(s_0^*, s_1^*, \dots, s_N^*)$  及び  $\sigma$  は  $s_0$  に依存しないので,  $\int ds_a$  は, 定常な多角形が完全につぶれているときはこの定常な多角形を周期軌道と考えたときの素周期軌道の長さの半分となり, そうでないとき全長に等しい. どちらの場合にも  $s_1$  の選び方は 2 通りあるが, 前者の場合には定常な多角形を周期軌道と考えるときには, 2 通りの選び方を区別することができないので, その分 2 倍してやはり素周期軌道の全長に等しいとする. これは因子  $\sqrt{\frac{m}{2E}}$  によって素周期軌道の周期となる. 従って

$$\rho(E) \approx \frac{mA}{2\pi\hbar^2} + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi\hbar} \sum_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{\gamma}}{\sqrt{|\operatorname{Tr} M_{\gamma}^k - 2|}} \exp \left( i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} k l_{\gamma} - \frac{k\sigma_{\gamma}}{2} \pi i + k N_{\gamma} \pi i \right) \quad (4.1.45)$$

を得る. ここで  $l_{\gamma} = \sum_{j=1}^{N_{\gamma}} \tau(s_j, s_{j+1})$  は, 衝突点を  $s_1$  から  $s_2, s_3, \dots, s_{N_{\gamma}}, s_1$  の順に線分でつないだ素周期軌道  $\gamma$  の長さである ( $s_{N_{\gamma}+1} = s_1$  とした). また, 素周期軌道  $\gamma$  のモノドロミー行列, 壁との衝突回数, 焦点の個数, 及び周期を, それぞれ  $M_{\gamma}, N_{\gamma}, \sigma_{\gamma}$ , 及び  $T_{\gamma}$  で表した. (4.1.45) により, 量子系のエネルギー固有値は, 半古典的領域において, 少なくとも形式的には完全に古典力学の情報だけで求めることができる.

撞球問題の場合, Gutzwiller formula と呼ばれるカオス系の半古典量子化は (4.1.45) となる. この式から分かるように, 半古典的な状態密度は, 滑らかな平均状態密度  $\frac{mA}{2\pi\hbar^2}$  の部分と, 周期軌道による振動項の部分から成る. 即ち, Weyl formula により与えられる平均状態密度に対して, 周期軌道による振動を用いてゆらぎを作るということである.

3 次元の Billiards でも同様の結果が得られる (Balian & Bloch 1971, 1972). また, Billiards ではなく, 一般のハミルトン系に対する Gutzwiller formula は

$$\sum_n \delta(E - E_n) \approx \bar{d}(E) + \frac{1}{\pi\hbar} \Re \sum_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{\gamma}}{\sqrt{|2 - \operatorname{Tr} M_{\gamma}^k|}} \exp \left[ ik \left( \frac{S_{\gamma}}{\hbar} - \frac{\nu_{\gamma}}{2} \pi \right) \right] \quad (4.1.46)$$

という形に書ける (Gutzwiller 1967-71, 1990, Berry & Mount 1972, Balian & Bloch 1974). ここで  $\bar{d}(E)$  は平均状態密度で相空間にプランク定数の細胞が入る数で決まる Thomas-Fermi 近似などから分かるように古典系の量だけで記述される.  $\gamma$  は各周期軌道を表し,  $k$  はそれを繰り返す回数である.  $S_{\gamma} = \oint_{\gamma} p dq$  は軌道  $\gamma$  に沿う古典力学の作用,  $T_{\gamma} \equiv \frac{\partial S_{\gamma}}{\partial E}$  は  $\gamma$  の周期である.  $M_{\gamma}$  は線形化されたポアンカレ写像, 即ち, モノドロミー行列である. また  $\nu_{\gamma}$  は Maslov 指数である.

## 4.2 Gutzwiller formula の Dispersing Billiards への適用

すべての周期軌道を用いれば (4.1.45) により本当にすべてのエネルギー固有値を得られるだろうか. 実はそう上手くは行かないのである. なぜならば (4.1.45) はこのままでは収束しないような級数になっているからである. 実際強いカオス系となる撞球系を考えると絶対収束するような級数で書かれた公式を得るには次のようになる (Eckhardt & Aurell 1989, Sieber & Steiner 1990c, Harayama & Shudo 1992a). まず, エネルギー  $E$  に複素部分を含ませ  $E + i\epsilon$  ( $E, \epsilon$  は実数) とする.

$$\sqrt{E + i\epsilon} \approx \sqrt{E} + i \frac{\epsilon}{2\sqrt{E}}$$

よりこの結果 (4.1.15) の各項には

$$\exp -\frac{k}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}} \epsilon l = \exp(-\frac{\epsilon}{\hbar} k T_\gamma)$$

という減衰因子が付くことになる. そのため長い軌道ほど寄与が小さくなり  $\epsilon$  を十分大きく取れば絶対収束するようになる. しかしエネルギーを  $E + i\epsilon$  にしたこと右辺は Lorentzian を収束因子とするデルタ関数となり  $\epsilon$  程度の幅を持つので, これが大きいと各エネルギー準位を解像できなくなる. そこで絶対収束する最小の  $\epsilon$  を求めることにする. (4.1.45) を上述の手続きによって書き換えると

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(E - E_n)^2 + \epsilon^2} \\ &= \Re \sum_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m l_\gamma}{p} \frac{1}{\sqrt{|2 - \text{Tr} M_\gamma^k|}} \exp \left[ ik \left( \frac{p l_\gamma}{\hbar} - \frac{\nu_\gamma}{2} \pi \right) - \frac{k \epsilon m}{\hbar p} l_\gamma \right] \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

となる. (4.2.1) の右辺について

$$\begin{aligned} & \sum_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \left| \Re \frac{m l_\gamma}{p} \frac{1}{\sqrt{|2 - \text{Tr} M_\gamma^k|}} \exp \left[ ik \left( \frac{p l_\gamma}{\hbar} - \frac{\nu_\gamma}{2} \pi \right) - \frac{k \epsilon m}{\hbar p} l_\gamma \right] \right| \\ & < \sum_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{const} \times l_\gamma}{p} \exp \left[ -k \left( \frac{\epsilon m l_\gamma}{\hbar p} + \frac{u_\gamma}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

である. ここで後述する第6章の結果を用いて (4.2.2) を評価する. 周期軌道の長さの累積密度  $N(l)$  は  $l$  が十分大きいとき指数関数的に増大しトポロジカルエントロピーを  $h$  とすると  $N(l) = \text{const} \times \exp(hl)$  である. また壁と  $n$  回衝突する周期軌道では長さは  $\bar{l}n$  のまわりに, 安定性指数は  $\bar{\lambda}n$  のまわりにガウス分布するので, 単位長さ当たりの平均軌道拡大率は  $\bar{u} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{l}}$  となる.  $k=1$  について収束すればよいので (4.2.2) で  $k=1$  について和を積分に,  $u_\gamma$  を  $\bar{u}l$  に置き換えると

$$\int_{l_0}^{\infty} dl \exp(hl) \exp \left[ -l \left( \frac{\epsilon m}{\hbar p} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right] \quad (4.2.3)$$

となる. これが収束するためには

$$\epsilon > \frac{\hbar p}{m} \left[ h - \frac{\bar{u}}{2} \right] = \hbar \sqrt{\frac{2E}{m}} \left[ h - \frac{\bar{u}}{2} \right] \quad (4.2.4)$$

でなければならない. 従って (4.2.4) を満足する  $\epsilon$  を用いる限り (4.2.1) の右辺の級数は確かに収束するようになる. しかし (4.2.4) はエネルギー  $E$  を含んでいるのでエネルギーが大きくなるとそれに応じて  $\epsilon$  も大きく取らなければならないことに注意しなければならない. 平均状態密度は (4.2.1) のようにエネルギーに依存せず一定であるから, エネルギーが小さいうちは各エネルギー準位を判別できるが, 大きくなるとデルタ関数の幅が準位間隔より大きくなってしまいうので個々のエネルギー固有値を解像できなくなってしまう. この問題は (4.2.4) を利用して (4.1.45) で Gaussian を収束因子とするデルタ関数を用いる形式により解決されている (Sieber & Steiner 1990c).

ところで Gutzwiller formula (4.2.1) はどの程度良い近似値を与えるだろうか. このことが明らかでないのはこの公式の導出が単なる漸近展開ではないことによる. また, どのくらいの個数の周期軌道を用いると, どのくらいのエネルギー準位がどの程度の誤差の範囲で得られるのかということも試してみないと分からないのである. そこで3つの円弧より成る Dispersing Billiard 系を第2章で得られた周期軌道を用いて (4.2.1) により半古典量子化したものと, シュレディンガー方程式 (4.1.1) をディリクレ条件 (4.1.2) の下で数値的に解いたものとを比較したのが図 4.2.1 である. 点線は (4.2.1) の左辺に境界要素法により得られたエネルギー固有値を代入したもので, 実線は (4.2.1) の右辺に第2章で得られた素周期軌道をすべて代入したものである. パラメーター  $\alpha_2$  の値によらず両者が驚くべきことに基底エネルギーから非常に良く一致することが分かる. ここで重要なのは1つ1つの周期軌道の寄与は極めて小さいがそれぞれが少しずつ協力し合って正しい状態密度を作るということである. 図 4.2.1 から分かるように数万個の素周期軌道が作れるエネルギー準位は僅かに基底状態から数えて十数番目までである. さらに上の準位を得るためには莫大な数の素周期軌道が必要なことから, 如何に各周期軌道の寄与が小さくしかも重要であるかが分かる. Gutzwiller 公式を通して見ると各周期軌道は互いに深く関係し合っていることが分かる.

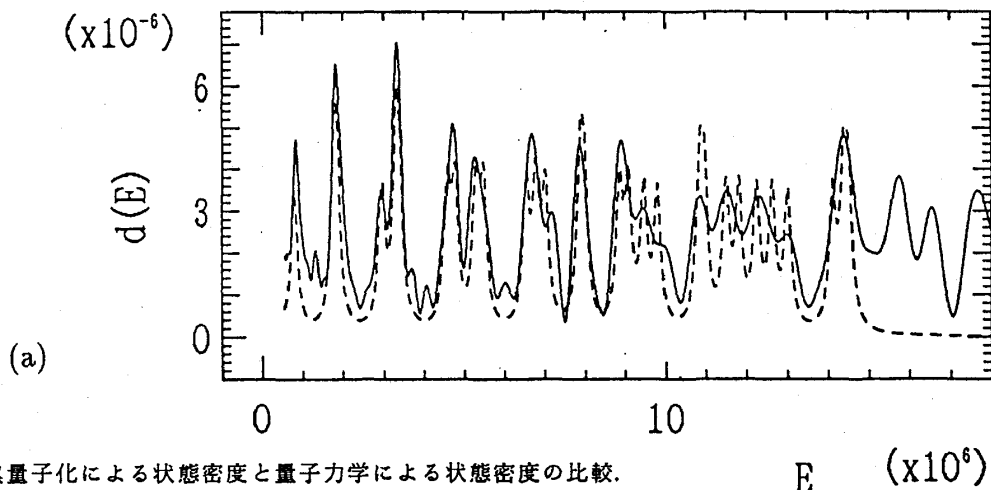


図 4.2.1. 半古典量子化による状態密度と量子力学による状態密度の比較.

(a)  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.1}$  (b)  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.2}$  (c)  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.3}$  (d)  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.4}$  (e)  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.5}$  (f)  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.6}$  (g)  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.7}$

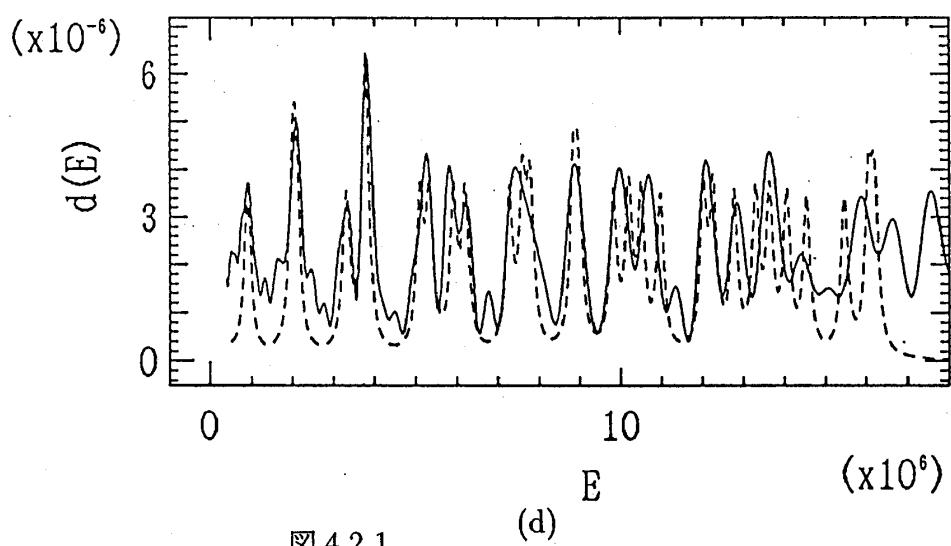
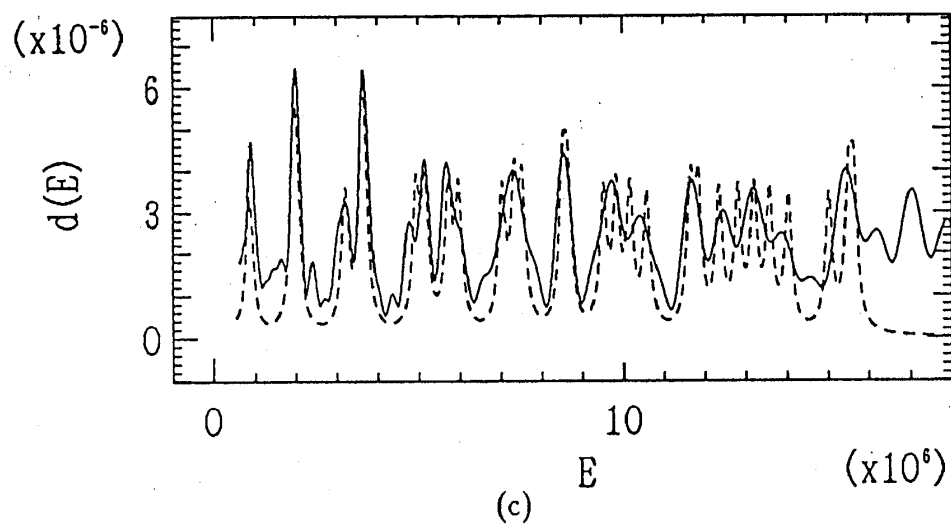
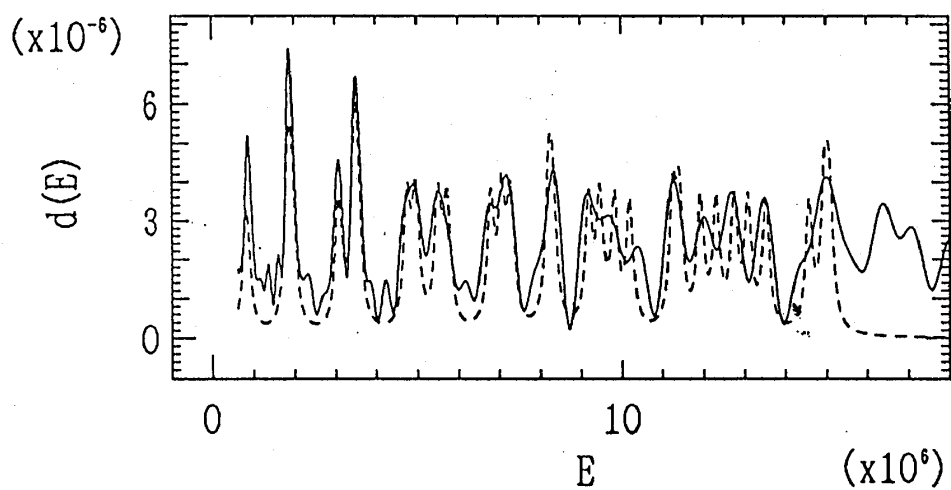


図 4.2.1.

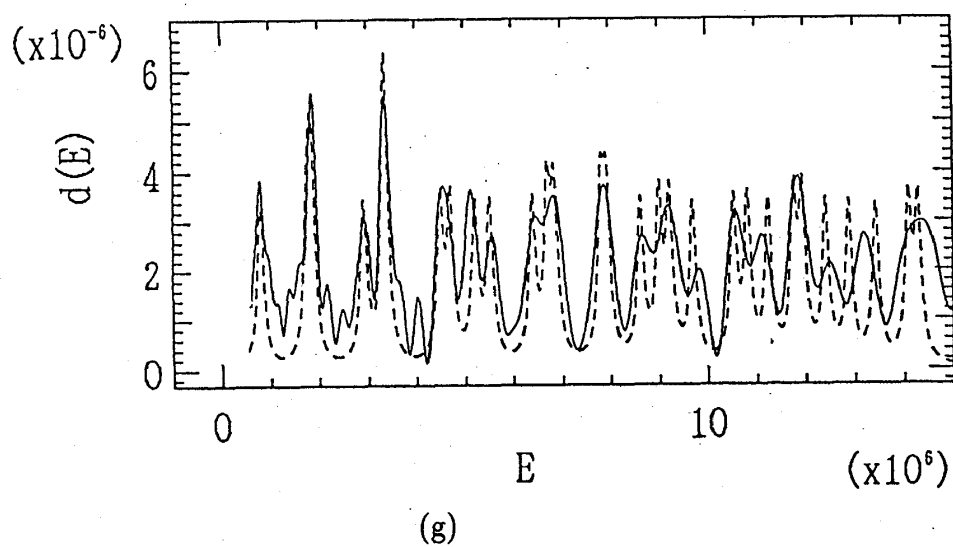
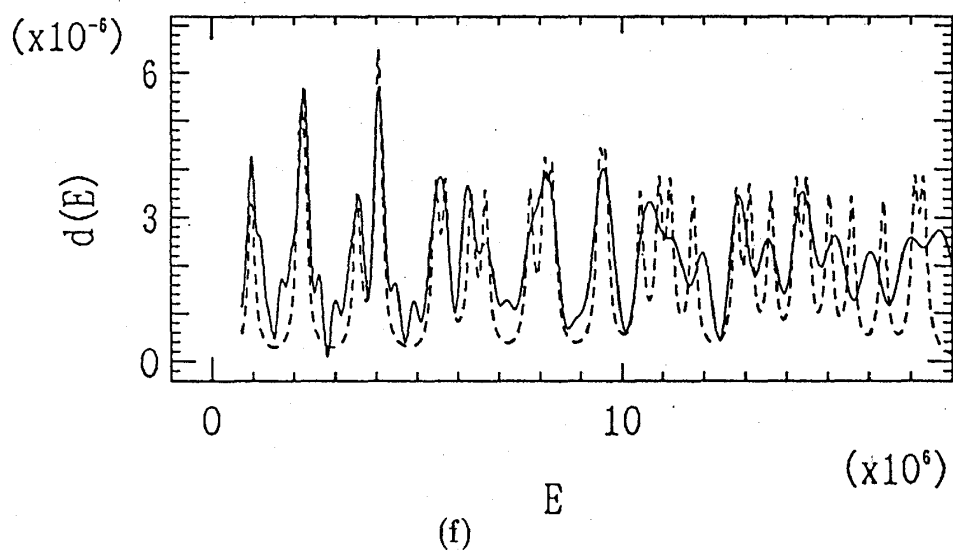
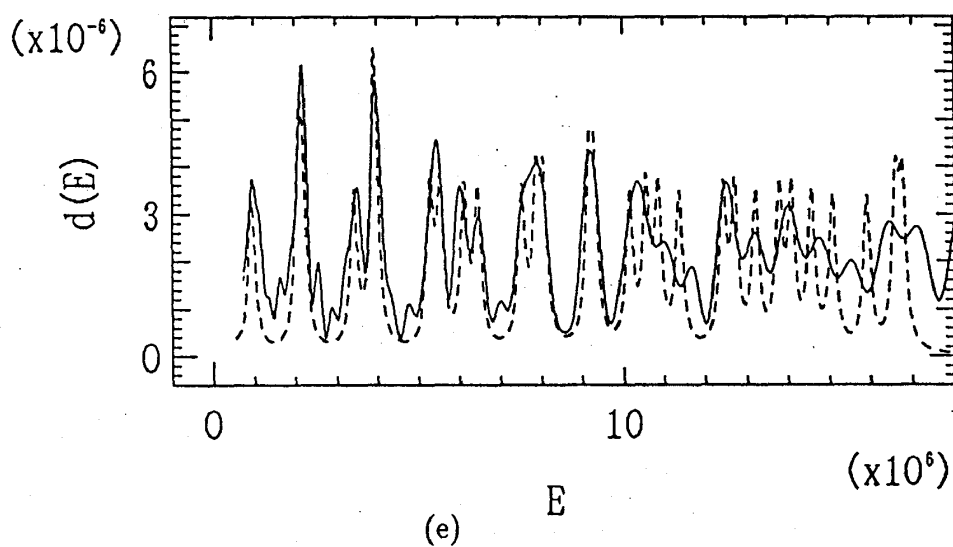


図 4.2.1.

### 4.3 Riemann-Siegel lookalike formula

Gutzwiller formula は以下のような変形によりゼータ関数の形にも書ける (Voros 1988).

$$g(E) = \text{Tr} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) \frac{2m}{\hbar^2} \right] = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{E - E_n} \quad (4.3.1)$$

であるから

$$\begin{aligned} \prod_j (E - E_j) &= \prod_j \exp\{\log(E - E_j)\} \\ &= a(E) \exp \left\{ \int_0^E -\pi g(E') dE' \right\} \\ &= b(E) \exp \left\{ -i\pi \bar{N}(E) + \int_0^E dE' [g(E') - \bar{g}(E')] \right\} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

となる. ここで  $\bar{N}(E)$  は準位間隔より十分大きい領域で平均した累積状態密度である. ここで Gutzwiller formula よりエネルギーの十分大きいところでは

$$g(E) - \bar{g}(E) \approx -\frac{i}{\hbar} \sum_{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_{\gamma} \exp\left(\frac{i}{\hbar} m S_{\gamma}\right)}{\sqrt{2 - \text{Tr} M_{\gamma}^m}} \quad (4.3.3)$$

が成り立つので, ゼータ関数  $\zeta(E)$  は

$$\prod_j (E - E_j) \sim \zeta(E) \equiv \exp \left\{ -i\pi \bar{N}(E) \right\} \prod_{\gamma} \exp \left\{ -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar} m S_{\gamma}\right)}{m \sqrt{2 - \text{Tr} M_{\gamma}^m}} \right\} \quad (4.3.4)$$

となる. ここで  $S_p$  には素周期軌道  $p$  の作用に加えて Maslov 指数も含めることにする. 周期軌道が反射を含まない双曲型であるとき,  $M_{\gamma}$  の固有値は  $\exp(\pm \lambda_{\gamma} l_{\gamma})$  (ここで  $\lambda_{\gamma} > 0$  とする) と書ける. したがって

$$|2 - \text{tr} M_{\gamma}^r| = \exp(r \lambda_{\gamma} l_{\gamma}) [1 - \exp(-r \lambda_{\gamma} l_{\gamma})]^2 \quad (4.3.5)$$

であるから

$$\frac{1}{\sqrt{|2 - \text{tr} M_{\gamma}^r|}} = \exp\left(-\frac{1}{2} r \lambda_{\gamma} l_{\gamma}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-rk \lambda_{\gamma} l_{\gamma}) \quad (4.3.6)$$

となる.

周期軌道が反射を含む双曲型であるとき,  $M_{\gamma}$  の固有値は  $-\exp(\pm \lambda_{\gamma} l_{\gamma})$  (ここで  $\lambda_{\gamma} > 0$  とする) と書けるので, 同様にして

$$\frac{1}{\sqrt{|2 - \text{tr} M_{\gamma}^r|}} = \exp\left(-\frac{1}{2} r \lambda_{\gamma} l_{\gamma}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{rk} \exp(-rk \lambda_{\gamma} l_{\gamma}) \quad (4.3.7)$$

となる. (4.3.5)-(4.3.7) より

$$\zeta(E) = \exp \left\{ -i\pi \bar{N}(E) \right\} \prod_{\gamma} \prod_{k=0}^{\infty} \left[ 1 - \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\gamma} - \left( k + \frac{1}{2} \right) \lambda_{\gamma} T_{\gamma} + k \delta_{\gamma} \pi i \right\} \right] \quad (4.3.8)$$

を得る. ここで

$$\delta_{\gamma} = \begin{cases} 0, & M_{\gamma} \text{の固有値が正} \\ 1, & M_{\gamma} \text{の固有値が負} \end{cases} \quad (4.3.9)$$

である.

Gutzwiller formula はすべての周期軌道を用いてすべてのエネルギー固有値を決定するという形式であるため, 真の半古典的エネルギー準位はすべての周期軌道を和に加えたとき初めて得られるということになる. しかし, カオス系では周期軌道の個数は周期に対して指数関数的に増大するので, すべての周期軌道を集めるのはかなり特殊な系でない限り不可能である (Keating 1990). Gutzwiller のゼータ関数に対して, Riemann のゼータ関数を resum することで得られる Riemann-Siegel 公式 (Edwards 1974) との類推から得られた予想がこの困難を克服する可能性を持っている. これは Riemann-Siegel lookalike formula と名付けられた関係

$$\prod_n (E - E_n) \approx A(E) \sum_{n=0}^{T_n < \hbar \bar{d}(E)/2} C_n(E) \cos \left\{ \frac{S_n(E)}{\hbar} - \pi \bar{N}(E) \right\} \quad (4.3.10)$$

が成立するというものである (Berry & Keating 1990, 付録 C). ここで和は Pseudo Orbit という素周期軌道の組み合わせについて取る.  $T_n$  と  $S_n(E)$  はそれぞれ Pseudo Orbit  $n$  の周期と作用である (作用は Maslov 指数と Billiards の場合は衝突回数を含む). また,  $C_n(E)$  は Pseudo Orbit を作る各素周期軌道の不安定性から計算される Pseudo Orbit の不安定性である. (1) は Gutzwiller のゼータ関数が実数値を取るという仮定からも得られる (Keating 1991). (1) の右辺は Gutzwiller 公式とは異なり有限個の周期軌道とであるから, 発散級数であることと軌道が無限に多く必要であることの2つの困難は現れない. 従ってこれを用いれば真の半古典的エネルギーが実際に得られると期待できる. そこでこの公式を3つの円弧から成る Dispersing Billiards に適用してその性能を確かめる. 図4.3に基底状態から10数番目までのエネルギー固有値を含む領域での結果を示す (Harayama, Shudo & Shimizu 1993). 基底エネルギーでさえ良く近似できることが分かる. しかし, この例では, Pseudo Orbits を作るのに要した17891個の素周期軌道に対して, 組み合わせによって出来る Pseudo Orbits は601367個にも達する. 周期軌道とでは有限とはなったが, Riemann-Siegel 公式のように効率の良いものではない. つまり, Pseudo Orbits は素周期軌道の組み合わせなので, それらについての和に加えるべき個数は周期に対して周期軌道の場合よりさらに激しく増大する. これ故, この公式を用いて最近接間隔分布を収束させるのに十分なほど多くのエネルギー準位を得られることは期待できない. Pseudo Orbits をすべて作り出さなくても良いような方法が必要である.

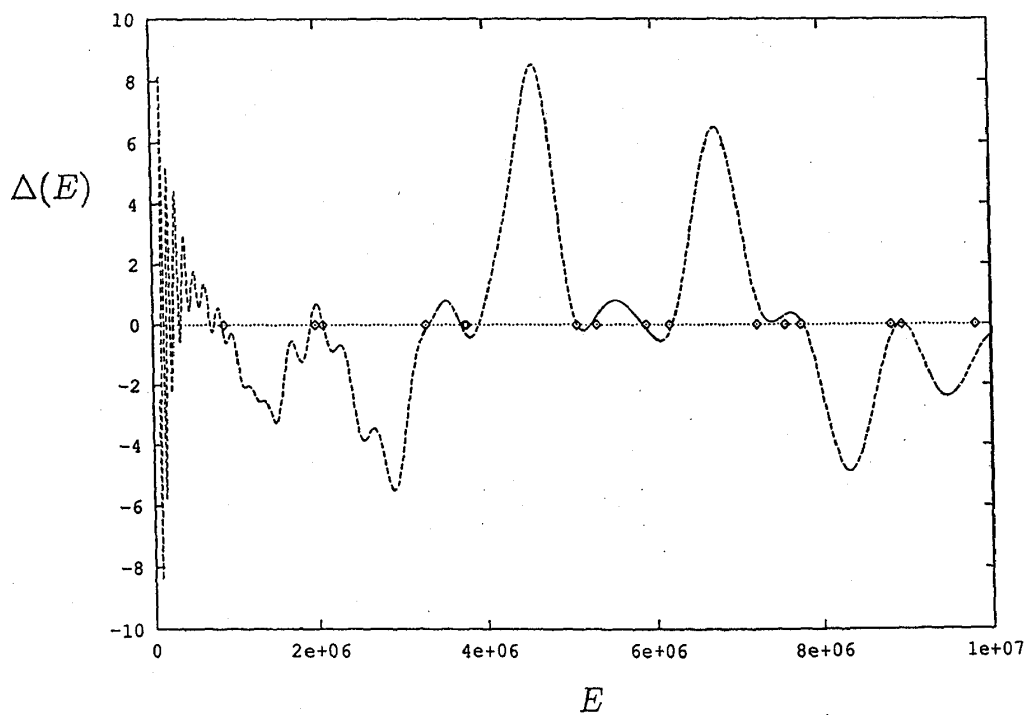


図 4.3. Riemann-Siegel lookalike formula.  $\alpha_2 = \frac{\pi}{24}$

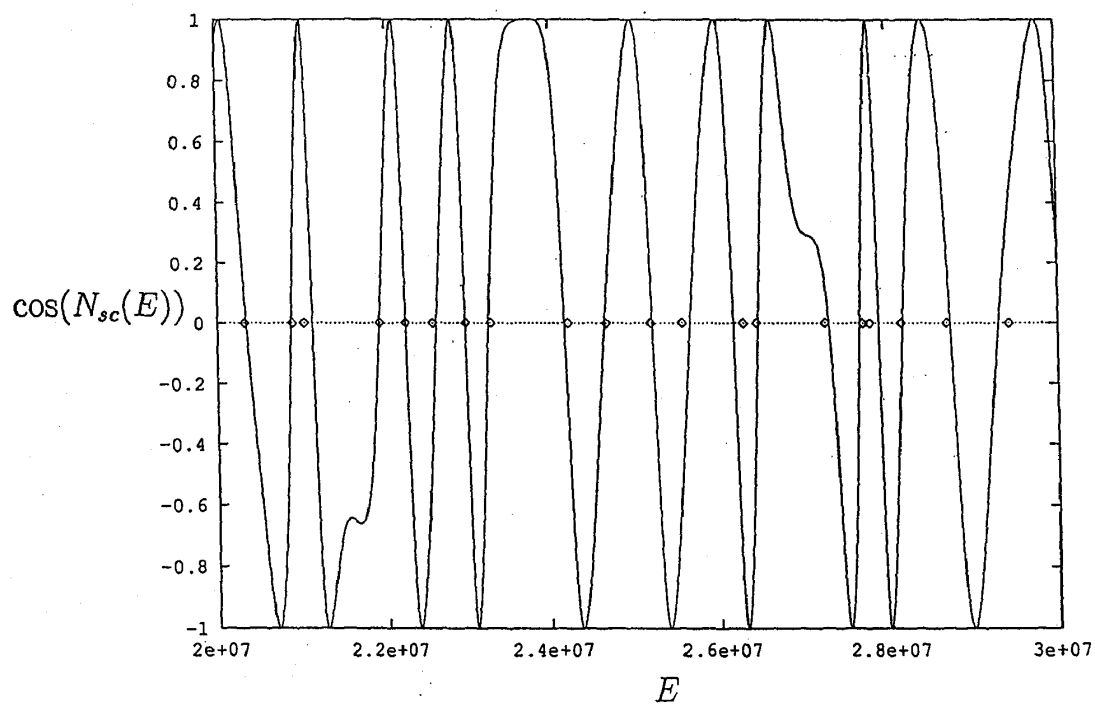


図 4.4.1. Novel Quantization.  $\alpha_2 = \frac{\pi}{24}$



## 4.4 Novel Quantization

Gutzwiller formula や Riemann-Siegel lookalike formula で半古典的エネルギー準位を多く得るには、非常に多くの周期軌道を必要とする。このため、なるべく少ない周期軌道でなるべく多くのエネルギー準位を与える方法を考えることが重要である。そのような方法で特に散乱問題で成功したのが Curvature Expansion で (Cvitanovic & Eckhardt 1989) である。これはゼータ関数のオイラー積を展開し、長い周期軌道の寄与と短い周期軌道の積の寄与とが相殺することを用いて、短い周期軌道だけでゼータ関数を近似する方法である。これは有限個の記号から成るあらゆる記号列に対して軌道がただ1つ存在するような記号力学を必要とする。また、束縛状態の場合、素周期軌道の繰り返しを無視できない。Dispersing Billiards ではこの2つの困難により Curvature Expansion を適用できない。

これと同様に Gutzwiller formula を基礎として、限られた周期軌道を使って多くのエネルギー準位を得る方法に Novel Quantization がある。これは累積状態密度  $N(E)$  がエネルギー固有値において1だけ増加する階段関数であることを利用して、 $\cos(N_{sc}(E))$  の零点として半古典的にエネルギー固有値を得る方法である (Aurich, Matthies, Sieber & Steiner 1992)。ここで  $N_{sc}(E)$  は Gutzwiller formula で計算される半古典的累積状態密度である。これは Gutzwiller のゼータ関数 (4.3.8) が半古典近似においても実数であると同じことである。この方法を Dispersing Billiards に適用した結果を図 4.4.1 に示す。これは前の2つの方法を適用した場合よりも高いエネルギーの領域で良い近似を与えることが分かる。この理由は cosine の引数に平均累積状態密度があるので、零点の分布は平均状態密度を確保していることにある。平均密度で与えられた零点を周期軌道によって真の準位へと僅かにずらすことで半古典的にエネルギー準位を与えるのである。非常に簡単な工夫で高いエネルギーまで良い精度で得られるように見えるが、基底エネルギーから高いエネルギーの方まで順に収束するのではなく、すべての準位が同時に収束するはずなので、これらは真の半古典的エネルギー準位ではない。良い近似のように見えるのは、平均状態密度を確保していることによる。この方法を用いるときはすべての周期軌道を加えなくてはならないのである。実際にこの方法で得られるエネルギー準位の周期軌道の周期に対する収束性を調べたのが図 4.4.2 である。平均準位間隔は確保しているのに、その間でいつまでも大きく振動している。様々な総和法を用いてもこの振動の振幅を平均準位間隔より十分小さくすることには今のところ成功していない。従ってこの方法、或いは Gutzwiller のゼータ関数を用いて半古典量子化するのであれば、すべての周期軌道を加えるべきである。有限個の周期軌道で得られるものは遷移的なものであり、真の半古典的準位とはほど遠い可能性さえ否定できない。

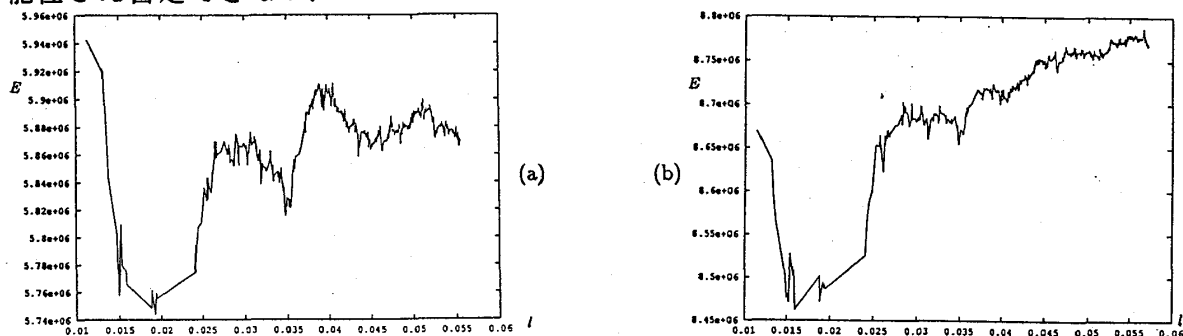


図 4.4.2. Novel Quantization により得られるエネルギー準位の収束性。基底状態から (a)9 番目 (b)14 番目

## 5 境界要素法と半古典量子化の関係

### 5.1 境界要素法

4.3 で示したように Gutzwiller formula は次のようなゼータ関数の形

$$\zeta(E) \equiv \exp \left\{ -i\pi \bar{N}(E) \right\} \prod_p \prod_{k=0}^{\infty} \left[ 1 - \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_p - \left( k + \frac{1}{2} \right) \lambda_p T_p + k \delta_p \pi i \right\} \right] \quad (4.3.8)$$

にも書ける (Gutzwiller 1982, Berry 1986, Voros 1988). ここで  $\lambda_p$  は素周期軌道  $p$  の安定性指数であり,

$$\delta_p = \begin{cases} 0, & M_p \text{ の固有値が正} \\ 1, & M_p \text{ の固有値が負} \end{cases} \quad (4.3.9)$$

である. また  $S_p$  は素周期軌道  $p$  の作用の他にマスコフ指数も含む. このゼータ関数はエネルギーが十分大きいところでは実数であると考えられ, 系のエネルギー固有値  $E_j$  が零点となっている.

ところで量子撞球問題, 即ち二次元平面のある有限な領域  $D$  において時間に依存しないシュレディンガー方程式の固有値, 固有関数をディリクレ条件の下で数値的に調べるには, 境界要素法を利用することができる. この方法でもやはりある複素関数  $\Delta(E)$  の零点としてエネルギー固有値を得る. ここではこの関数  $\Delta(E)$  がエネルギーが十分大きい領域では平均累積状態密度の項を除いてゼータ関数と一致することを示す. この証明を通して周期軌道量子化法と境界要素法とで実際に数値計算で行っていることがほとんど同じであり, それ故 4.2 での 2 つの方法が与える結果が互いに驚くほどよく一致していたことがより良く理解できるようになる.

また半古典的な境界要素法は一般の束縛系に拡張することができ (Adachi), 相空間が有限であることから, Riemann-Siegel lookalike formula が予想されている (Bogomolny 1992).

ディリクレ条件の下でヘルムホルツ方程式を数値的に解く方法である境界要素法について説明する (cf. Riddell 1979, Berry & Wilkinson 1984). 2 次元平面内で剛体壁  $\partial A$  に囲まれた領域  $A$  における粒子の定常状態は時間に依存しないシュレディンガー方程式

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \text{ in } A \quad (5.1.1)$$

とディリクレ条件

$$\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \text{ on } \partial A \quad (5.1.2)$$

によって記述される. ここで  $\mathbf{r} = (x, y)$  はデカルト座標,  $m$  は粒子の質量,  $\hbar$  はプランク定数,  $E$  は粒子のエネルギー固有値,  $\psi$  は  $E$  に対応する固有状態の波動関数である.

全空間でシュレディンガー方程式 (5.1.1) に対する時間に依存しないグリーン関数は

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{2mE}{\hbar^2} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.1.3)$$

で定義され, 特解は

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4}iH_0^{(1)}\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) \quad (5.1.4)$$

で与えられる. ここで  $H_0^{(1)}$  は第一種零次のハンケル関数である (Abramowitz & Stegun 1964).  $\{(5.1.3) \times \psi - (5.1.1) \times G_0\}$  を領域  $A$  で  $\mathbf{r}'$  について面積分するとグリーンの定理より

$$\oint ds' \{ \psi(\mathbf{r}') \mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \psi(\mathbf{r}') \} = \begin{cases} \psi(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \text{ in } A \\ \frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \text{ on } \partial A \\ 0 & \mathbf{r} \text{ outside } A \end{cases} \quad (5.1.5)$$

を得る. ここで  $s'$  は境界上にとったある始点から  $A$  の境界に沿って反時計まわりを正方向として測った長さで,  $\mathbf{n}'$  は  $\mathbf{r}'$  における  $A$  に対して外向きの法線ベクトルである.  $A$  の境界  $\partial A$  上の点  $s$  における  $\psi$  の勾配の境界に対して垂直な成分を

$$u(s) \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}(s)) \quad (5.1.6)$$

で定義する. (5.1.5) で  $\mathbf{r}$  が  $A$  の境界  $\partial A$  上にあるとき,  $\psi$  の勾配の境界に対して垂直な成分を求めると  $\partial A$  では  $\psi = 0$  であるから

$$u(s) = -2 \oint ds' u(s') \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (5.1.7)$$

を得る.  $\tau(s, s')$  を境界  $\partial A$  上の点  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  とのユークリッド距離

$$\tau(s, s') \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (5.1.8)$$

とし,  $\varphi(s, s')$  を  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  と  $A$  に対して外向きの法線ベクトル  $\mathbf{n}$  とのなす角 (反時計まわりを正方向) とすると図 4.1.1 より (4.1.1 の  $\varphi$  の定義と異なることに注意)

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G_0 = \cos \varphi(s, s') \frac{\partial G_0}{\partial \tau} \quad (5.1.9)$$

である. ところで (5.1.4) より

$$\frac{\partial G_0}{\partial \tau} = -\frac{1}{4}i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{1}{4}i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} H_1^{(1)} \quad (5.1.10)$$

であるから (5.1.7) は

$$u(s) = -\frac{1}{2}i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \oint ds' u(s') \cos \varphi(s, s') H_1^{(1)}\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tau(s, s')\right) \quad (5.1.11)$$

となる.

ここで境界  $\partial A$  を  $K$  個の部分に分割することを考える. 全周の長さを  $L$  として始点から  $i$  番目の部分までの周に沿って測った長さを  $s_i$  とすると,

$$s_i \equiv i \frac{L}{K}, \quad \tau_{ij} \equiv \tau(s_i, s_j), \quad \varphi_{ij} \equiv \varphi(s_i, s_j), \quad \text{for } i, j = 1, 2, \dots, K \quad (5.1.12)$$

となる。境界上での線積分を各部分における値の和に置き換えると (5.11) は

$$u(s_i) = -\frac{1}{2}i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{L}{K} \sum_{j=1}^K u(s_j) \cos \varphi_{ij} H_1^{(1)} \left( \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tau_{ij} \right), \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (5.1.13)$$

のように  $K$  次元の連立方程式となる。ここで  $K \times K$  の行列  $D$  を

$$D_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{2}i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{L}{K} \cos \varphi_{ij} H_1^{(1)} \left( \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tau_{ij} \right) \quad (5.1.14)$$

で定義すると (5.1.13) が自明でない解を持つためには

$$\det D = 0 \quad (5.1.15)$$

でなければならないので、エネルギー固有値は

$$\Delta(E) = \lim_{K \rightarrow \infty} \det D \quad (5.1.16)$$

の零点で与えられる。  $\Delta(E)$  は複素数値関数なので分割が本当に無限大であればエネルギーの変化にしたがって複素数値を取りながら変化しエネルギー固有値において原点を通る。しかし実際の数値計算では分割数  $K$  は有限であるから複素平面で丁度原点を通ることがなくなるため、  $\Delta(E)$  の絶対値を最小にする  $E$  の値をエネルギー固有値として求めるという方法が取られる。このときドブロイ波長に比べて分割された境界の各部分の長さが十分小さければこのようにして求めたエネルギー固有値は数値的に設けた基準の範囲内では収束する。したがってより多くのエネルギー固有値を求めるためにはより細かく境界を分割することが必要になるのである。任意の境界の形に対して収束する分割の仕方は知られていない。

ところで第4章で半古典論の結果と比較した厳密な量子力学の結果とは、例えば図4.2.1では、ここで説明した境界要素法によって求めたエネルギー固有値をローレンツィアンで滑らかにしたデルタ関数に代入したものである。この方法は Gutzwiller の周期軌道量子化とは全く異なる方法であるから、互いに良く一致するエネルギー準位を与えることができるのは一見不思議である。次節以降では  $\Delta(E)$  の半古典極限を考えることにより両者の関係を明らかにする。

## 5.2 境界要素法の半古典極限

一般に行列式は

$$\det D = \exp(\operatorname{tr} \ln D) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{tr}(D - I)^n\right\} \quad (5.2.1)$$

とトレースを用いて表すことができる。またこれは具体的に

$$\operatorname{tr}(D - I)^n = \left(\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\right)^n \left(\frac{L}{K}\right)^n \sum_{l_1} \sum_{l_2} \cdots \sum_{l_n} \prod_{j=1}^n \cos \varphi_{l_j l_{j+1}} H_1^{(1)}\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tau_{l_j l_{j+1}}\right) \quad (5.2.2)$$

と書ける。ここで  $l_{n+1} = l_1$  である。  $\lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{L}{K}\right) \sum_{l_j}$  を  $\oint ds_j$  に置き換えると

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(D - I)^n = \left(\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\right)^n \oint ds_1 \oint ds_2 \cdots \oint ds_n \prod_{j=1}^n \cos \varphi(s_j, s_{j+1}) H_1^{(1)}\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tau(s_j, s_{j+1})\right) \quad (5.2.3)$$

を得る。

次に (5.2.3) の右辺の半古典極限 ( $\hbar \rightarrow 0$ ) を考える。以下では撞球台の形について次のようなものに限ることとする。この系を古典系として考えるならば非常に強いカオス系でありすべての周期軌道は不安定な双曲型で、安定でも不安定でもないものや楕円型のは全く存在しない。 $z$  を変数とするハンケル関数では  $z$  が十分大きいとき漸近形は

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4})} \quad (5.2.4)$$

である。(5.2.3) で (5.2.4) を用い、さらに積分を定常位相近似によって評価すると

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(D - I)^n \approx \sum_{\text{p.o.}} \left( \prod_{j=1}^n \frac{\cos \varphi(s_j^*, s_{j+1}^*)}{\sqrt{\tau(s_j^*, s_{j+1}^*)}} \right) \frac{1}{\sqrt{|\det W(n)|}} \exp\left(i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} l(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*) - \frac{\sigma}{2}\pi i\right) \quad (5.2.5)$$

となる。ここで  $\sum_{\text{p.o.}}$  はすべての周期軌道について和を取ることを表す。また  $W(n), l, \sigma$  はそれぞれ

$$W_{ij}(n) = \frac{\partial^2 l}{\partial s_i \partial s_j}(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*), \quad (5.2.6)$$

$$l = \sum_{j=1}^n \tau(s_j, s_{j+1}), \quad (5.2.7)$$

$$\sigma = W(n) \text{ の負の固有値の個数} \quad (5.2.8)$$

である. さらに  $l$  が  $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$  で定常であるという条件

$$\frac{\partial l}{\partial s_j}(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.2.9)$$

が満足されている. 4.1 での議論から

$$\Delta(E) = \exp \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{\sqrt{|2 - \text{tr} P(n)|}} \exp \left( i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} l(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*) - \frac{\sigma}{2} \pi i \right) \right] \quad (5.2.10)$$

を得る. ここで  $\sum_{\gamma}$  は出発点に戻って来るまでに壁と  $n$  回衝突するような周期軌道 (頂点を  $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$  とする定常な  $n$  角形) すべてについての和を表す. また  $P(n)$  は頂点が  $n$  個の定常な多角形, 即ち周期軌道のモノドロミー行列である.

$s_1^*$  の位置を固定したとき,  $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$  の並び方の順番は周期軌道が時間反転して区別できないときは 1 通りしかなく, 区別できるとき, 即ち時間を反転した軌道と元の軌道が異なる場合は 2 通りある. 並び方の順番を 1 つ決めたときの  $s_1^*$  の選び方は, この壁と  $n$  回衝突する周期軌道が壁と  $N_p$  回衝突する素周期軌道  $p$  の  $r$  回の繰り返しであれば  $N_p = n/r$  通りある.  $s_1^*$  の選び方が異なる同じ周期軌道については 1 度だけ和を取ることにすると,

$$\Delta(E) = \prod_p \exp \left[ - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r \sqrt{|2 - \text{tr}(P(N_p))^r|}} \exp \left( i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} l_p - \frac{\sigma_p}{2} \pi i + N_p \pi i \right) \right] \quad (5.2.11)$$

となる. ここで  $\prod_p$  はすべての素周期軌道についての積を表す.

周期軌道が反射を含まない双曲型であるとき,  $P(N_p)$  の固有値は  $\exp(\pm \lambda_p l_p)$  (ここで  $\lambda_p > 0$  とする) と書ける. また周期軌道が反射を含む双曲型であるとき,  $P(N_p)$  の固有値は  $-\exp(\pm \lambda_p l_p)$  (ここで  $\lambda_p > 0$  とする) と書ける. よって (4.3.6), (4.3.7) を用いて整理するとセルバーグ型のゼータ関数

$$\Delta(E) = \prod_p \prod_{k=0}^{\infty} \left[ 1 - \exp \left( i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} l_p - \frac{\sigma_p}{2} \pi i + N_p \pi i - \left( k + \frac{1}{2} \right) \lambda_p l_p + k_p \pi i \right) \right] \quad (5.2.12)$$

を得る (Harayama & Shudo 1992b). ここで

$$k_p = \begin{cases} 0 & \dots \text{eigenvalue of } P(N_p) > 0 \\ k & \dots \text{eigenvalue of } P(N_p) < 0 \end{cases} \quad (5.2.13)$$

である. 4.2 に示したようにエネルギー固有値を零点に持つような関数は半古典極限ではやはりセルバーグ型のゼータ関数として Gutzwiller 公式からも導かれる. ここで得た半古典量子化との違いはここでは平均状態密度が現れていないことである.  $\sigma$  はマスロフ指数に一致し, 2 次元平面内の撞球系では自己共役点の個数に等しく, 一般のハミルトン系でも正準変換で普遍である (Creagh, Robbins, & Littlejohn 1990, Robbins 1991).

このように境界要素法と Gutzwiller formula は非常に良く似た方法であることが分かる. 境界要素法を Gutzwiller formula の側から見ると, (5.2.2) から明らかのように様々な

多角形について和を取ることで周期軌道を炙り出すような方法であるといえる。しかも実際の計算では、これらの多角形に辺を共有させることで能率良く計算できるようにしていることが分かる。この近似の妥当性は、(5.2.2) と (5.2.5) の近似で決まる。周期軌道を炙り出すとき、各周期軌道は孤立した直線としてはっきりと浮かび上がるのではなく、その回りにゆらぎを持って少しぼやけている。このゆらぎを定常位相近似では Gaussian とするのであるが、この幅が重なってしまうぐらい多くの周期軌道が存在するとこの近似は破綻する可能性がある。逆に言えば、周期軌道が短いうちは非常に良い近似となる。これが第4章で半古典論を適用したとき量子力学の結果と良く一致した理由である。量子系に対する古典カオスの反映を知るにはかなり多くのエネルギー準位を必要とする。半古典論がそれを満足するぐらい十分多くのエネルギー準位を、平均準位間隔よりも十分小さい誤差の範囲で決定できるようなものであるかは、より長い周期軌道を和に含めてテストして明らかにしなければならない。しかし、カオス系の周期軌道の個数は周期に対して指数関数的に増大するので、このような立場からは Gutzwiller formula は絵に描いた餅である。そこで、Gutzwiller formula に長い周期軌道を多く含めるためには周期軌道を詳しく調べることに第一歩であると考える。

## 6 周期軌道の統計的性質とその普遍性

この章での目的は表 2.2 の結果を用いて周期軌道の幾何学的な性質を調べることと、これらの性質が特殊なパラメーターの値のときだけに成り立つようなものではなく、強いカオス系に普遍的であることをパラメーターを変化させることで調べることにある。まず、長さスペクトルの累積密度分布

$$N(l) = \#\{\text{素周期軌道 } \gamma \mid \gamma \text{ の長さ } l_\gamma \leq l\} \quad (6.1)$$

について調べることにする。周期軌道を長さの順ではなく衝突回数（衝突回数は軌道の長さに比例する）の小さい方から順に求めたため  $l$  の大きいところに相当する周期軌道すべては得られていないと考えられる。また長さの短いところでは周期軌道の数が少ないので統計法則に従うことは期待できない。これらのことを考慮して  $\alpha_2 = \frac{\pi}{24}$  のとき長さの順で 50 番目から 8000 番目までの周期軌道を用いて長さスペクトルの累積密度分布を求めた結果が図 6.1 である。点線は指数関数であり、図 6.1(b) は方対数表示である。これらの図から  $N(l)$  が指数関数で良く近似できることが分かる。この結果は  $\alpha_2$  が他の値のときでも同様であった。有限個のマルコフ分割が存在しているような系では軌道の豊富さを表す量であるトポロジカルエントロピーを  $h$  とすると

$$N(l) \approx \frac{\exp(hl)}{hl} \quad (6.2)$$

という関係が  $l$  の十分大きいところで成り立つことが厳密に証明されている (Alekseev & Yakobson 1981, Parry & Pollicott 1984, Morita 1991)。Dispersing Billiards ではマルコフ分割を作ろうとすると可算無限個の分割が出来てしまうので、 $N(l)$  の漸近形はまだ正確には知られていないが (Sinai, Bunimovich & Chernov 1990),  $l$  が大きいと (6.2) で主には指数関数の部分が効くことと、図 6.1 のように指数関数に良く合うという結果がパラメー

ターの値によらないことから Dispersing Billiards ならば必ず  $N(l)$  は (6.2) の形になると考えられる。そこで図から求めた指数の値をそのパラメーターの値における系のトポロジカルエントロピー  $h(\alpha_2)$  と考えてよい。図 6.2 に示すように  $\alpha_2$  が小さくなると  $h$  の値が大きくなるのは、 $\alpha_2$  が小さいほど強いカオス系になるということから理解できる。

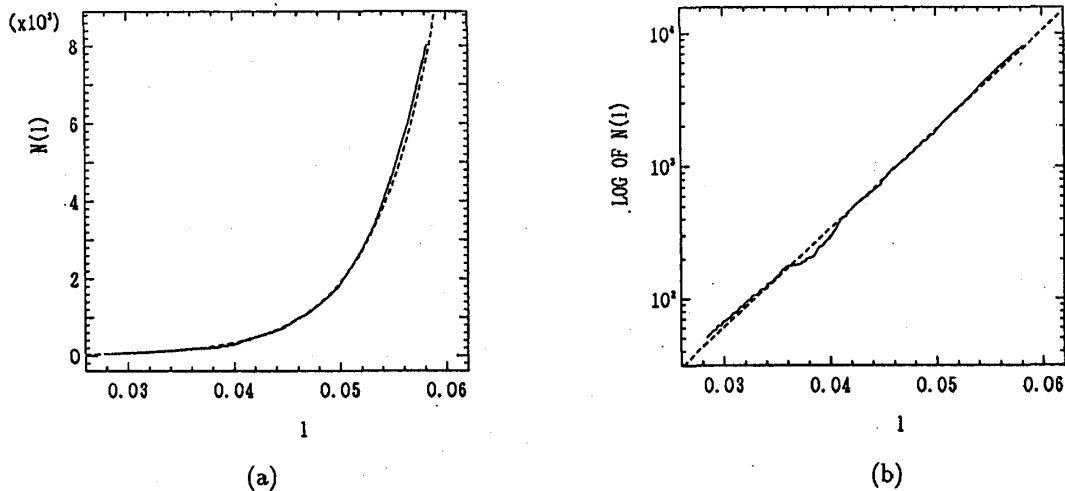


図 6.1. 長さスペクトルの累積密度.(a)  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.4}$  (b) 片対数.

長さスペクトルの累積密度が指数関数的に増大することは強いカオス系であることの直接的な結果であり、第 2 章で示したようにこのような系を半古典的に量子化することの最も大きな障害となる。しかし現時点では古典系の言葉で量子系を説明するには半古典論を用いる以外の方法は見つかっていないので、少なくともこれらの困難を乗り越えなければ古典カオス系としての性質が量子力学系としての性質のどこに反映するかを見ることはできないのである。1つの方法としては周期軌道の性質を詳しく調べ、それを利用して解決できることが考えられる。長さスペクトルが何らかの法則に従っていれば周期軌道の長さは予測可能となり非常に扱い易い。そこでまず長さスペクトルの最近接間隔分布を調べることにする。これは各素周期軌道の長さの間に短距離の相関があるかどうかを調べるということであり、エネルギースペクトルに関して一般に用いられている方法である。結果がどの長さの範囲で調べたかに依存しないように、累積密度分布を用いて平均密度が 1 になるように定義し直した長さスペクトルをエネルギースペクトルの場合の類推から開かれた長さスペクトルということにしよう。いろいろな  $\alpha_2$  の値での開かれた長さスペクトルの最近接間隔分布を図 6.3 に示す。実線は表 2.2 にあるすべての  $\alpha_2$  の値のときの開かれた長さスペクトルの最近接間隔分布を重ねて描いたものである。パラメーター  $\alpha_2$  の値によらず点線で示したポアソン分布に非常に良く一致することが分かる。この結果は Dispersing Billiard 系では周期軌道の長さの間に短距離の相関がないことを示している。



更に高次の相関に関して調べることにする. ここでもやはりエネルギースペクトルの統計的性質を調べるときの方法として用いられている Spectral Rigidity を使って調べる. これは

$$\Delta_3(L, x) \equiv \frac{1}{L} \min_{A, B} \int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} [n(\epsilon) - A\epsilon - B]^2 d\epsilon \quad (6.3)$$

で定義される 2 次の相関を調べる量である. ここで  $n(\epsilon)$  は開かれた長さスペクトルの累積密度である.  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.4}$  のときの結果を図 6.4 に示す. 点線は  $n(\epsilon)$  がポアソン分布に従うときに得られる傾きが  $L/15$  の直線であり, これに良く一致していることは周期軌道間に 2 次の相関がないことを示している. この結果は他の  $\alpha_2$  の値のときでも全く同様であるから Dispersing Billiard 系の周期軌道の長さの間には長距離の相関もないことが分かる. 以上の結果から Dispersing Billiards では素周期軌道の長さの分布の仕方はデタラメであるということになる.

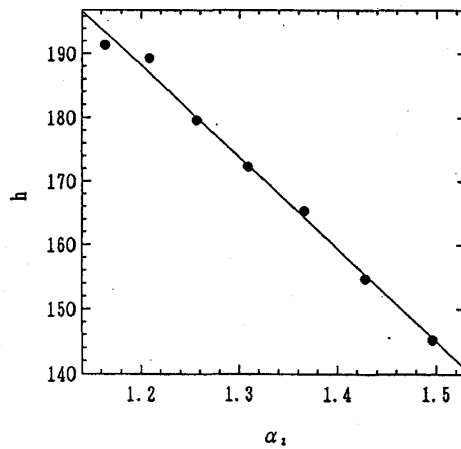


図 6.2. トポロジカルエントロピー.

次に出発点に戻るまでに壁と  $n$  回衝突するような周期軌道たちの長さの分布を調べる. ここでもやはり統計法則に従うくらい周期軌道の数が多いように衝突回数は十分大きいものだけを考える. 開かれた長さスペクトルの最近接間隔分布がポアソン分布になると,  $n$  が大きくなると平均の長さも増すことを併せて考えると,  $n$  に依存する平均の長さのまわりにデタラメに分布するであろうと予想される.  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.4}$  のときの結果を図 6.5 に示す. 点線はガウス分布

$$P_n(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma}} \exp\left(-\frac{(l - \bar{l}_n)^2}{2\sigma^2 n}\right) \quad (6.4)$$

である. ここで  $\bar{l}, \sigma$  は  $\alpha_2$  だけに依存する. このようなガウス分布に良く一致するということから, このくらい粗い見方をしてしまうと周期軌道が酔歩によって得られる結果, 即ち, 平均の値が  $n$  に比例して増大しそのまわりにガウス分布するものと区別できなくなることが分かる.  $\alpha_2$  が大きくなると撞球台の面積も大きくなるので同じ記号列に対応する周期軌道でもその長さは増すため, 図 6.6 に示すように  $\bar{l}$  は  $\alpha_2$  とともに増大する. ところで衝

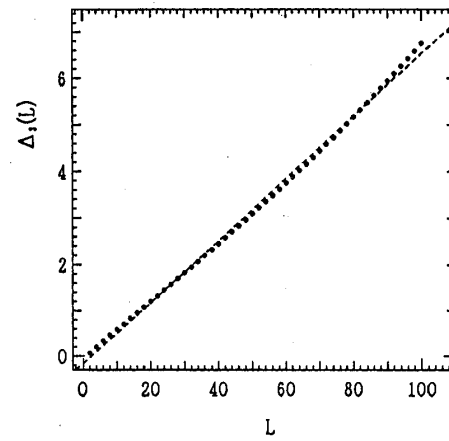
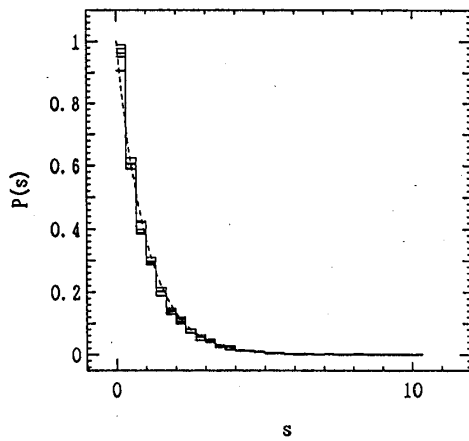


図 6.3. 長さスペクトルの最近接間隔分布. 図 6.4.  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.4}$  のときの長さスペクトルの Spectral Rigidity.

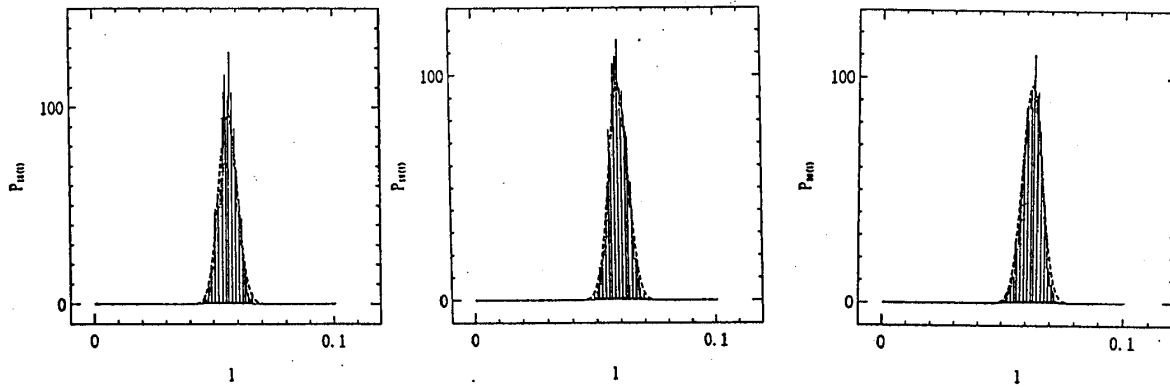


図 6.5.  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.4}$  のときの衝突回数に対する長さの分布.

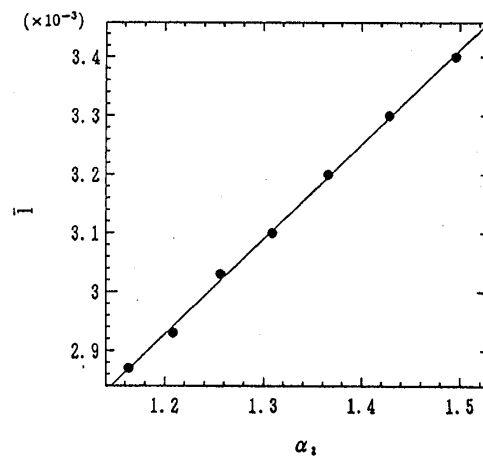


図 6.6. スケールし直した平均の長さの  $\alpha_2$  依存性.

## 突回数による累積密度分布

$$N(n) = \#\{ \text{素周期軌道 } \gamma \mid \gamma \text{ の壁との衝突回数 } n_\gamma \leq n \} \quad (6.5)$$

は図 6.7 のように点線の指数関数  $\text{const} \times e^{\beta n}$  で良く近似出来る。ここで明らかに  $N(n)$  と  $N(l)$  はまったく別のものであるから混同する心配ないであろうから同じ  $N$  という記号を用いた。  $\beta$  はトポロジカルエントピー  $h$  に類似した量であるから図 6.8 に示すように  $\alpha_2$  が小さくなると大きくなる。  $l$  が十分大きいところで定常位相近似を用いて  $N(n)$  と  $P_n(l)$  とから  $N(l)$  を  $\exp(h')$  という形で求めることが出来ることが知られていて (Sieber & Steiner 1990a, 付録 B), そのとき  $h'$  は

$$h' = \frac{1}{\sigma^2} \left( \bar{l} - \sqrt{\bar{l}^2 - 2\sigma^2\beta} \right) \quad (6.6)$$

となる。表 6.1 に示すように  $h'$  と  $h$  の差は  $\alpha_2$  のどの値においても 10% 以下であるから、 $l$  が有限であることを考えると良く一致していることが分かる。

さらに安定性についても統計則が成り立っているか考察する。まず、周期軌道の安定性を記述する線形化ポアンカレ写像の 1 より大きい固有値  $\lambda$  の絶対値の対数である不安定性指数  $\lambda$  のスペクトルの最近接間隔分布は図 6.9 に示すようにポアソン分布によく一致する。また、出発点に戻って来るまでに壁と  $n$  回衝突する周期軌道の不安定性指数  $\lambda$  の分布  $P'_n(\lambda)$  を調べる。周期軌道の長さに関する結果から安定性指数間にもやはり相関はないと考えられる。そして実際図 6.10 に示すようにこれを数値的に計算した結果はガウス分布

$$P'_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma'}} \exp \left( -\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_n)^2}{2\sigma'^2 n} \right) \quad (6.7)$$

に良く一致するのである。このことは  $\alpha_2$  の値によらない。ここで  $\bar{\lambda}$  はこの系のカオスの強さを表す平均軌道拡大率リアプノフ指数である。そのため図 6.11 のように  $\alpha_2$  が小さくなるとより強いカオス系となるので  $\bar{\lambda}$  は大きくなるのである。この結果から周期軌道の安定性の指数もデタラメに分布していることが分かる。

我々の撞球台はパラメーター  $\alpha_2$  の値によらず常に強いカオス系である。この節でのすべての結果もまたカオスの強さを決めるパラメーター  $\alpha_2$  の値にはよらないので強いカオス系の普遍的な性質であると予想される。

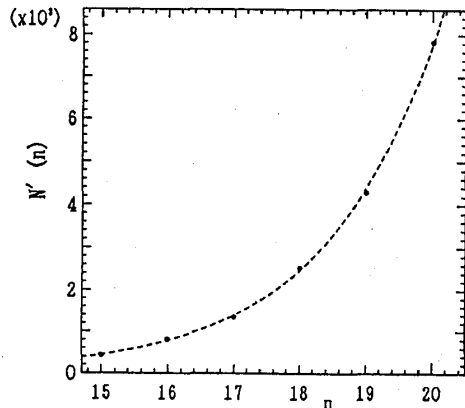


図 6.7. 衝突回数に対する周期軌道の個数密度  $N'(n)$ .

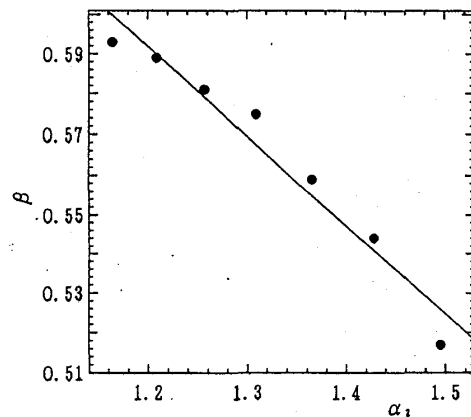


図 6.8.  $\beta$  と  $\alpha_2$  の関係.

表 6.1. トポロジカルエントロピー  $h$  と  $h'$  の比較.

$\alpha_2$	$\pi/2.1$	$\pi/2.2$	$\pi/2.3$	$\pi/2.4$	$\pi/2.5$	$\pi/2.6$	$\pi/2.7$
$h$	145.2	154.7	165.3	172.3	179.6	189.3	191.4
$h'$	153.9	167.5	177.3	190.9	197.2	205.9	210.5

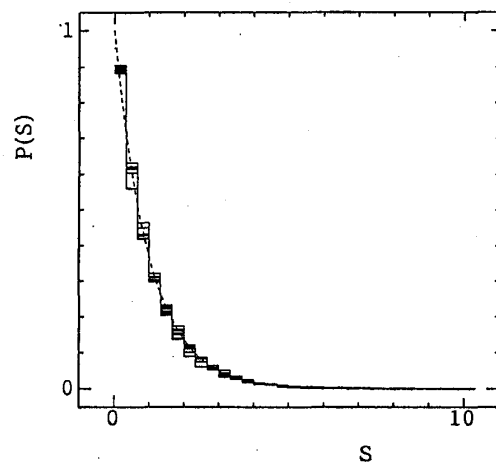


図 6.9. 不安定性指数スペクトルの最近接間隔分布.

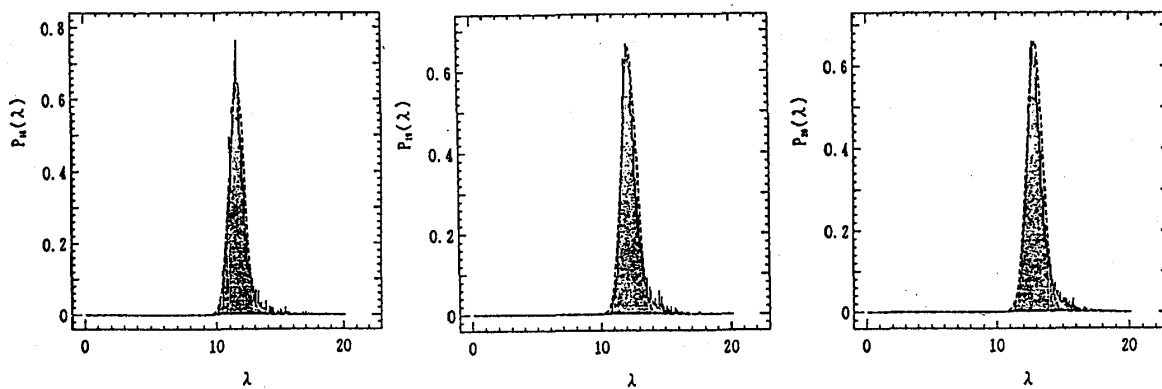


図 6.10.  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2.4}$  のときの衝突回数に対する不安定性指数の分布.

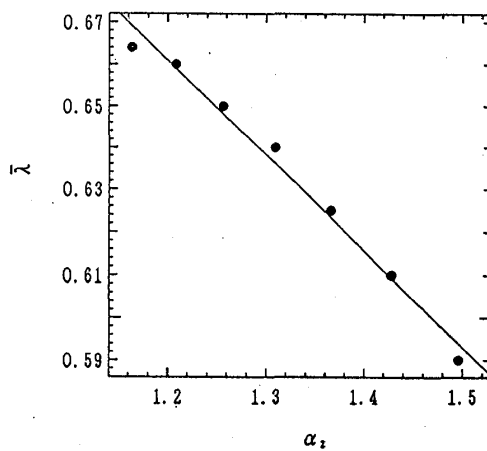


図 6.11. リャプノフ指数の  $\alpha_2$  依存性.

## 7 結語

第6章では強いカオス系であることが厳密に証明されている Dispersing Billiards の周期軌道の統計的性質を計算機により数値的に調べ、得られたことについて報告した。ここで重要なことは、我々の3つの円弧から成る撞球台はカオスの強さを制御するパラメーターを持っており、この値によらない強いカオス系の周期軌道に関する普遍的な性質を引き出すことができることである。実際、周期軌道の個数は長さに対して指数関数的に増大することや長さスペクトルの最近接間隔分布と Spectral Rigidity はポアソン分布に一致し、初期点に戻るまでの壁との衝突回数を決めたときの長さの分布はガウス分布に一致することがパラメーターの値に依らずに成り立つことが明らかになった。これらの結果は強いカオス系の周期軌道の間には全く相関がないことを示唆しているように感じさせる。しかし、第4章で報告したように、これらの周期軌道を用いて Gutzwiller の跡公式を用いて半古典的にこの系を量子化して得たエネルギー固有値と、厳密な量子力学の与えるものはやはりパラメーターの値に依らずに非常に良く一致するので、実はもっとずっと僅かな相関があり、それによって周期軌道は状態密度を作れるのであり、相関がないのは我々の見方が粗いことを示している。そのような僅かな相関を発見し、それを用いて跡公式を収束させることが今後の課題である。実際 Spectral Rigidity の理論から予想されている相関もあり (Keating 1991c, Argaman, Doron, Keating, Kitaev, Sieber, Smilansky 1992), それらを取り入れて行くことも大切である。第4章で用いた Riemann-Siegel lookalike formula は、有限個の周期軌道で真の半古典的エネルギー準位を与える可能性があり、無限個の周期軌道と収束性の問題を同時に解決するものであるから最も重要な理論である。しかし、この理論においても周期軌道の個数の増大則は依然として残る困難であるので、周期軌道間の相関を詳しく調べ、それを用いて必要な Pseudo Orbits を減じることが重要である。また強いカオス系の定常状態では、短い不安定周期軌道の上に存在確率が局在する 'Scar' という現象が知られている (Heller, O'Connor & Gehlen 1989, Bogomolny 1988)。定常状態と周期軌道との間のそのような対応は、必ずしも全ての周期軌道により全てのエネルギー固有値が決定されているわけではないことを示唆している可能性があり、今後詳しく調べる必要がある。

ところで、本論文では定常状態に関する半古典論のみを扱ったが、時間発展に関する半古典論も重要である (Adachi 1989, Ikeda 1992, O'Connor & Tomsovic 1991, Tomsovic & Heller 1991, Sepúlveda, Tomsovic & Heller 1992)。エネルギー領域の半古典論と時間領域の半古典論は完成すれば同値なものとなるはずである。時間領域の半古典論ではどのくらい長い間半古典論が量子力学の結果を模倣できるかということが大きな問題である。Gutzwiller formula に関しても、時間発展についてはどこまでも半古典論が上手く機能することを仮定している。しかし、時間発展の半古典論は無限に長い時間良い近似を与えることはできない (Shudo & Ikeda 1993)。このことはそもそも Gutzwiller の跡公式が実エネルギー軸上では決して収束しないことを意味しているのかも知れない。2つの半古典論の破綻は共に軌道間の相関によるものとも考えられる。両者の関係を明らかにすることは重要である。

また、第5章では量子撞球問題を数値的に解く際に用いている境界要素法の半古典極

限を考えることで、第4章での結果を説明できることを報告した。境界要素法では有限個に分割された境界上の点の情報により構成される行列の行列式の零点を与えるものをエネルギー固有値として求める。半古典極限でこの行列式は平均累積状態密度の位相因子を除いて Gutzwiller のゼータ関数に一致することを示した。これにより境界要素法と周期軌道量子化法との類似が明らかになった。ところで、Gutzwiller のゼータ関数と比較して平均累積状態密度の位相因子を掛けると実数になることを要請できるので、一般に境界要素法では絶対値の最小値としてしかエネルギー固有値を求めることができないのに対して、実関数の零点として計算できるようになる。このような方法では、周期軌道間に Gutzwiller のゼータ関数を実数にするという相関があるということを用いているとも考えられる。実際周期軌道量子化法にこの方法を併せて用いるのが第4章で扱った Novel Quantization であり、そのような相関を利用しているのでより高いエネルギー固有値を得ることができるのかも知れない。ところが境界要素法を周期軌道量子化の立場から見た場合、周期軌道の与える値との誤差はエネルギーの周期（衝突回数）乗であるため、あるエネルギー単位から突然近似が悪くなるので、境界要素法にこの方法を併せても同じ分割数でより高いエネルギー固有値を得ることはできない。元々の境界要素法で求めることの可能なエネルギー領域はドブロイ波長と同じぐらいであるからこれが限界であるかも知れない。しかしより高いあるいはより広いエネルギー領域での性質は未だに未知であるから、そのようなところまで調べられるような数値的な方法を開発することは重要である。

以上のように本論文では強いカオス系の半古典量子化に関して、Gutzwiller formula 及びそれを基礎とする Riemann-Siegel lookalike formula と Novel Quantization, 境界要素法との関係及び周期軌道の普遍則を中心に議論した。古典力学系でみられるカオスはその系を量子化した系にどのように現れるかを知る方法として今のところ我々には半古典論しかない。したがってカオス系の半古典量子化の完成は避けては通れない。今まで得られた周期軌道についてさらに様々な観点から調べ知見を積み上げて困難を乗り越えたいと考えている。

## 8 謝辞

日頃から有益な議論をして戴いている京都大学基礎物理学研究所池田研介教授と東京工業大学清水寧氏に大変感謝致します。また大阪大学盛田健彦教授、大阪教育大学古賀真史助手、山梨医科大学秋山真治助手には撞球系の周期軌道についてご教示戴き大変感謝致します。最後に早稲田大学相沢洋二教授にはいつも研究を励まして戴き大変感謝致します。

## 9 付録

### 9.1 付録 A. 撞球系のモノドロミー行列

撞球系の軌道の安定性はここで示すように軌道が分かるとすぐに計算できる (cf. 久保泉 1973 (本付録と記号の使い方が異なることに注意)). これは軌道の指数関数的な不安定性は壁との衝突だけに起因しているからである.

撞球台の壁に 1 点を取り原点とする. 壁上の点  $r$  とは原点から反時計まわりを正方向として壁に沿って測った距離が  $r$  の壁上の点であるとする. 反射角とは壁との衝突点における内向き法線ベクトルと粒子の飛び出す方向の単位ベクトルの成す角とする. また壁上の点  $r$  での曲率  $k(r)$  は内向き法線ベクトルで測ることにする. まず図 A のように撞球台上のある点から出発し時刻  $t$  後に壁上の点  $r$  にぶつかり反射角  $\varphi$  で飛んで行く軌道に対して, 飛び出す方向が僅かに  $d\alpha$  だけずれて同じ点から出発し壁上の点  $r + dr$  でぶつかり反射角  $\varphi + d\varphi$  で飛んで行く軌道を考える. 図より高次の無限小を無視すると,

$$dr = \frac{t}{\cos \varphi} d\alpha \quad (A.1)$$

$$d\beta = -k(r)dr \quad (A.2)$$

が成り立つことが分かる. これより

$$d\varphi = d\alpha - d\beta = \left[ 1 + \frac{k(r)t}{\cos \varphi} \right] d\alpha \quad (A.3)$$

$$d\theta = d\beta - d\varphi = - \left[ 1 + \frac{2k(r)t}{\cos \varphi} \right] d\alpha \quad (A.4)$$

$$\rho = -\cos \varphi \frac{dr}{d\theta} = \frac{t}{1 + \frac{2k(r)t}{\cos \varphi}} \quad (A.5)$$

となる. 即ち, 方向が角度  $d\theta$  だけ異なって同じ点から出発した 2 つの (壁に衝突しない) 軌道が時刻  $\rho$  後に壁上の点  $r$  に至ったものとして置き換えることができる.

次に粒子が点  $r_0$  で壁にぶつかり反射角  $\varphi_0$  で飛び出し, 次に点  $r_1$  で再び壁にぶつかり反射角  $\varphi_1$  で飛び出していくとしよう. 最初の衝突点の位置が  $dr_0$  だけ, 入射角が  $d\varphi_0$  だけ異なる軌道では, 次の衝突点の位置と反射角がそれぞれ  $dr_1, d\varphi_1$  だけずれるとする. (A.1), (A.3), (A.4) 及び (A.5) より

$$dr_1 = \frac{\tau + \rho}{\cos \varphi_1} d\theta = -\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_1} \left[ 1 + \frac{\tau k(r_0)}{\cos \varphi_0} \right] dr_0 - \frac{\tau}{\cos \varphi_1} d\varphi_0 \quad (A.6)$$

を得る. 同様にして

$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= \left[ 1 + \frac{k(r_1)(\tau + \rho)}{\cos \varphi_1} \right] d\theta \\ &= - \left\{ k(r_1) \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_1} \left[ 1 + \frac{\tau k(r_0)}{\cos \varphi_0} \right] + k(r_0) \right\} dr_0 - \left[ 1 + \frac{\tau k(r_1)}{\cos \varphi_1} \right] d\varphi_0 \end{aligned} \quad (A.7)$$

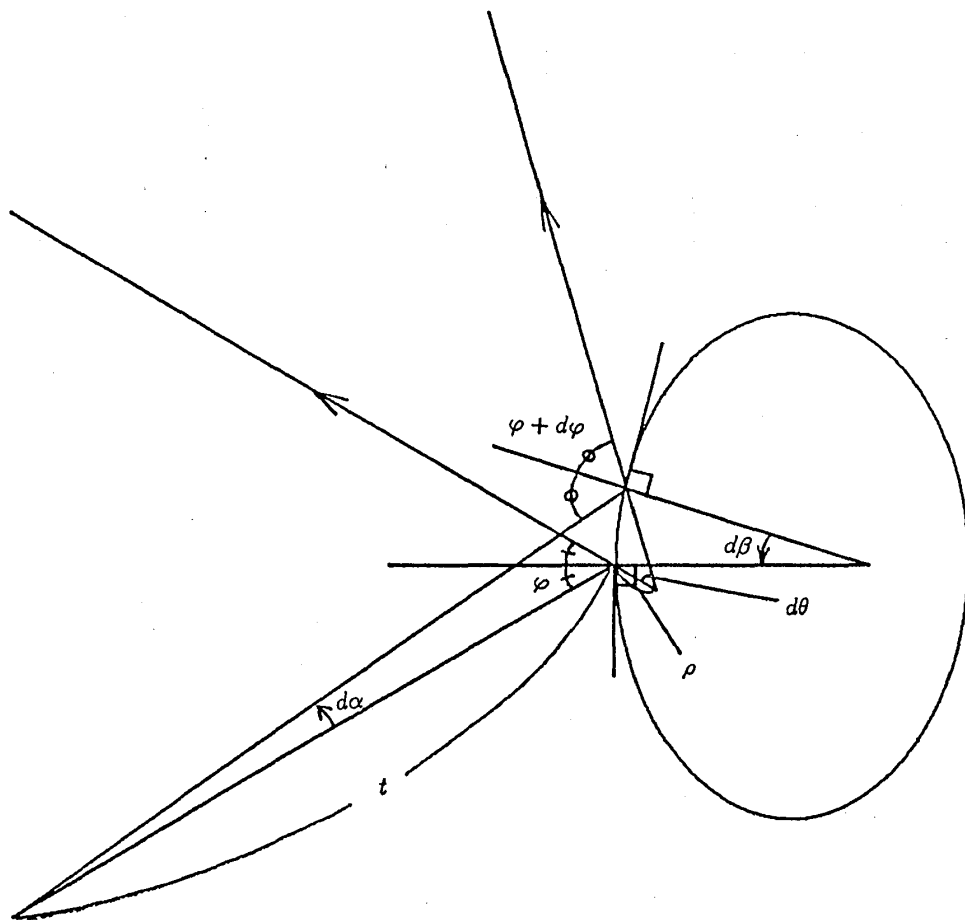


図 A 撞球系の軌道の安定性



を得る.(A.6) と (A.7) とをまとめて

$$\begin{pmatrix} dr_1 \\ d\varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_1} \left[ 1 + \frac{\tau k(r_0)}{\cos \varphi_0} \right] & -\frac{\tau}{\cos \varphi_1} \\ -\left\{ k(r_1) \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_1} \left[ 1 + \frac{\tau k(r_0)}{\cos \varphi_0} \right] + k(r_0) \right\} & -\left[ 1 + \frac{\tau k(r_1)}{\cos \varphi_1} \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr_0 \\ d\varphi_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

と書ける. ここで  $\tau$  は点  $r_0$  と点  $r_1$  とのユークリッド距離である. 簡単のためこれを

$$\begin{pmatrix} dr_1 \\ d\varphi_1 \end{pmatrix} = M_{1 \leftarrow 0} \begin{pmatrix} dr_0 \\ d\varphi_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

と書くことにする.

さて点  $r_1, r_2, \dots, r_n$  に次々に衝突する周期軌道のモノドロミー行列について考えよう. 点  $r_1$  と点  $r_2$  の間の周期軌道上の 1 点で軌道に交差する方向に  $y$  軸を設け正準共役な運動量を  $p_y$  とし, この点でのモノドロミー行列を  $M$  とする. モノドロミー行列とは線形化したポアンカレ写像であるから, 点  $(y, p_y)$  のすぐ近くの点  $(y + dy_0, p_y + dp_{y0})$  を出発した点が最初に  $y$  軸を横切るとき点  $(y + dy_1, p_y + dp_{y1})$  を通るとすると高次の無限小を除いて

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dp_{y1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} dy_0 \\ dp_{y0} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

となる.  $M$  の行列式は明らかに 1 なので固有方程式

$$x^2 - \text{Tr} M x + 1 = 0 \quad (\text{A.11})$$

の 2 つの根として  $M$  の固有値が得られる.(A.11) より  $\text{Tr} M$  が 2 より大きいとき固有値は実数となり周期軌道は不安定であることが分かる. ところで軌道が  $y$  軸上の点  $y_0$  において位置としては  $dy_0$  だけ, 運動量としては  $dp_{y0}$  だけずれると次の衝突点  $r_1$  でぶつかる壁上の位置が  $dr_1$  だけ, 反射角が  $d\varphi_1$  だけずれるとすると高次の無限小を除いて

$$\begin{pmatrix} dr_1 \\ d\varphi_1 \end{pmatrix} = M_{1 \leftarrow y_0} \begin{pmatrix} dy_0 \\ dp_{y0} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

と書ける. ここで  $M_{1 \leftarrow y_0}$  は  $2 \times 2$  正方行列である. また同様に点  $r_n$  での衝突において  $dr_n, d\varphi_n$  だけ微小変化したときに生じる微小変換  $dy_1, dp_{y1}$  の間の高次の無限小を除いて成り立つ関係を

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dp_{y1} \end{pmatrix} = M_{y_1 \leftarrow n} \begin{pmatrix} dr_n \\ d\varphi_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

と書くことにする. これらの行列を用いるとモノドロミー行列  $M$  は

$$M = M_{y_1 \leftarrow n} M_{n \leftarrow n-1} \cdots M_{3 \leftarrow 2} M_{2 \leftarrow 1} M_{1 \leftarrow y_0} \quad (\text{A.14})$$

と表すことができる. ここで 2 つの正方行列  $A, B$  について

$$\text{Tr} AB = \text{Tr} BA \quad (\text{A.15})$$

が成り立つので

$$\text{Tr} M = \text{Tr} M_{1 \leftarrow y_0} M_{y_1 \leftarrow n} M_{n \leftarrow n-1} \cdots M_{3 \leftarrow 2} M_{2 \leftarrow 1} \quad (\text{A.16})$$

となる. ここで明きらかに

$$M_{1 \leftarrow n} = M_{1 \leftarrow y_0} M_{y_1 \leftarrow n} \quad (\text{A.17})$$

が成り立つから

$$\text{Tr} M = \text{Tr} M_{1 \leftarrow n} M_{n \leftarrow n-1} \cdots M_{3 \leftarrow 2} M_{2 \leftarrow 1} \quad (\text{A.18})$$

を得る. Dispersing Billiards では壁の至るところで曲率は正であるから (A.7), (A.11) より  $M$  の固有値は常に実数で出発点に戻って来るまでの衝突回数  $n$  が奇数のときは負で, 偶数のときは正であることが分かる. また

$$M_{1 \leftarrow 0} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \varphi_1} & 0 \\ \frac{k_1}{\cos \varphi_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & 0 \\ k_0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

とも書けるので点  $r_i$  と点  $r_j$  とのユークリッド距離を  $\tau_{ij}$  と書くことにすると (A.18), (A.15) より

$$\begin{aligned} \text{Tr} M &= \\ & (-1)^n \text{Tr} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \varphi_1} & 0 \\ \frac{k_1}{\cos \varphi_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau_{n1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_n & 0 \\ k_n & 1 \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \varphi_n} & 0 \\ \frac{k_n}{\cos \varphi_n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau_{n-1n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_{n-1} & 0 \\ k_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \\ & \times \cdots \\ & \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \varphi_2} & 0 \\ \frac{k_2}{\cos \varphi_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{pmatrix} \\ & = (-1)^n \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & \tau_{n1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_n & 0 \\ k_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \varphi_n} & 0 \\ \frac{k_n}{\cos \varphi_n} & 1 \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} 1 & \tau_{n-1n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_{n-1} & 0 \\ k_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \varphi_{n-1}} & 0 \\ \frac{k_{n-1}}{\cos \varphi_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \\ & \times \cdots \\ & \times \begin{pmatrix} 1 & \tau_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \varphi_1} & 0 \\ \frac{k_1}{\cos \varphi_1} & 1 \end{pmatrix} \\ & = (-1)^n \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\tau_{n1}k_n}{\cos \varphi_n} & \tau_{n1} \\ \frac{2k_n}{\cos \varphi_n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\tau_{n-1n}k_{n-1}}{\cos \varphi_{n-1}} & \tau_{n-1n} \\ \frac{2k_{n-1}}{\cos \varphi_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\tau_{12}k_1}{\cos \varphi_1} & \tau_{12} \\ \frac{2k_1}{\cos \varphi_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

を得る.

## 9.2 付録B. 定常位相近似

積分

$$I = \int f(x) \exp\left(i \frac{\phi(x)}{\hbar}\right) dx \quad (B.1)$$

を  $\hbar \rightarrow 0$  の極限で評価することを考える. このような極限においては, 位相因子が非常に激しく振動し, これが定常なところ以外は打ち消し合うと考えられる. 定常な点は原点 0 だけであるとして計算を進める. まず, この点の回りで  $f(x)$  と  $\phi(x)$  を

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots \quad (B.2)$$

$$\phi(x) = \phi(0) + \frac{1}{2}\phi''(0)x^2 + \dots \quad (B.3)$$

と展開する. これより

$$I = \exp\left(i \frac{\phi(0)}{\hbar}\right) \times \left[ f(0) \int dx \exp\left(i \frac{\phi''(0)}{2\hbar} x^2\right) + f'(0) \int dx x \exp\left(i \frac{\phi''(0)}{2\hbar} x^2\right) + \frac{1}{2}f''(0) \int dx x^2 \exp\left(i \frac{\phi''(0)}{2\hbar} x^2\right) + \dots \right] \quad (B.4)$$

となる. ここで現れた積分は

$$J_n = \int x^n \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right) \quad (B.5)$$

という形である. 但し,

$$\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( -i \frac{\phi''(0)}{\hbar} + \epsilon \right) \quad (B.6)$$

である. 従って

$$I = f(0) \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{|\phi''(0)|}} \exp\left\{ i \frac{\phi(0)}{\hbar} + \frac{\pi}{4} i \times \text{sign} \phi''(0) \right\} + O(\hbar^{3/2}) \quad (B.7)$$

を得る.

### 9.3 付録 C.1. Riemann のゼータ関数との類推

Riemann のゼータ関数はディリクレ級数, または素数についてのオイラー積を用いて

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}} \quad (\operatorname{Re} z > 1) \quad (C.1.1)$$

と定義される ( $z$  平面の至るところ解析接続により定義する). 有名な Riemann 予想とはゼータ関数の零点が, 自明なもの ( $\operatorname{Re} z = -2, -4, \dots$ ) 以外はすべて実部が  $1/2$  という直線上にあるというものである (Edwards 1974, 鹿野 1991). この Critical Strip 上では  $E$  を実数として

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + iE\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-iE \log n)}{n^{1/2}} \quad (C.1.2)$$

となる (がこれは発散する).  $E$  が零点を横切るときゼータ関数の対数は  $\pi i$  だけ増加し,  $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$  のとき  $\zeta(z) \rightarrow 1$  であるので, 零点の分布  $d(E)$  は

$$d(E) \approx \bar{d}(E) - \operatorname{Im} \frac{i}{\pi} \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \log p \exp\left(-\frac{1}{2} k \log p\right) \exp(iEk \log p) \quad (C.1.3)$$

となる. 平均密度  $\bar{d}(E) = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{E}{2\pi}\right)$  である (Edwards 1974, 鹿野 1991). これは Gutzwiller 公式と大変良く似ており,  $\hbar = 1$  として比較すると, Riemann のゼータ関数の零点をエネルギー固有値とする系の古典系としての性質は, 素周期軌道  $p$  に関して作用が

$$S_p(E) = E \log p \quad (C.1.4)$$

で周期が

$$T_p(E) = \frac{dS}{dE} = \log p \quad (C.1.5)$$

で不安定性指数が

$$\lambda_p = \log p \quad (C.1.6)$$

であることが分かる.

実際, 定負曲率曲面上のラプラシアン固有値と閉測地線に関係付ける Selberg のゼータ関数に関して, Riemann 予想の類似が成立する (Selberg 1956, 砂田 1988) (これは Gutzwiller 公式が近似無しに成立する場合である). また, 素数の分布が Riemann のゼータ関数を用いて評価できるのと同様に, 強いカオス系の周期軌道の周期の分布は Dynamical ゼータ関数を用いて評価できる場合がある (Parry & Pollicot 1983, Morita 1991) (このとき素数と同様の分布となる). さらに, Riemann のゼータ関数の零点の Form Factor は, 強いカオス系の場合 (Berry 1985) と同じ振る舞いをするとも知られているので (Montgomery 1973), 両者の類似を強く感じる.

さて, (2) を発散しないよう  $E$  に関して漸近展開し, Riemann-Siegel 公式を導く. Berry は Gutzwiller のゼータ関数への類推を考慮し, それまで知られていたこの公式の導出 (Edwards 1974) を非常に簡単化した (Berry 1991). まず和を 2 つの部分に分け,

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + iE\right) = \sum_{n=1}^{n^*} \frac{\exp(-iE \log n)}{n^{1/2}} + \sum_{n=n^*+1}^{\infty} \frac{\exp(-iE \log n)}{n^{1/2}} \quad (C.1.7)$$

とする. 第 2 項をポアソン総和公式

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{a-1/2}^{b+1/2} dx f(x) \exp(2\pi i m x)$$

を用いて変換すると,

$$\sum_{n=n^*+1}^{\infty} \frac{\exp(-iE \log n)}{n^{1/2}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{n^*+1/2}^{\infty} dx \frac{\exp\{i(2\pi m x - E \log x)\}}{x^{1/2}} \quad (C.1.8)$$

となる. 積分を定常位相近似で評価すると,  $x = \frac{E}{2\pi m}$  ( $1 \leq m \leq E/2\pi n^*$ ) で定常なので

$$\sum_{n=n^*+1}^{\infty} \frac{\exp(-iE \log n)}{n^{1/2}} \approx \exp\{-2\pi i \bar{N}(E)\} \sum_{m=1}^{E/2\pi n^*} \frac{\exp(iE \log m)}{m^{1/2}} \quad (C.1.9)$$

となる. ここで

$$\bar{N}(E) = \frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi e} + \frac{7}{8} \quad (C.1.10)$$

である. さらに  $n^* = \left\lfloor \sqrt{\frac{E}{2\pi}} \right\rfloor$  ( $\sqrt{\frac{E}{2\pi}}$  を越えない最大整数を表す (ガウス記号)) とすると,

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + iE\right) \approx 2 \exp\{-\pi i \bar{N}(E)\} \sum_{m=1}^{\left\lfloor \sqrt{\frac{E}{2\pi}} \right\rfloor} \frac{\cos(E \log m - \pi \bar{N}(E))}{m^{1/2}} \quad (C.1.11)$$

を得る. 和は丁度

$$\frac{d}{dE}(E \log m - \pi \bar{N}(E)) = 0 \quad (C.1.12)$$

を満たす  $m$  まで取ることになっている.  $E$  までの零点は  $\left\lfloor \sqrt{\frac{E}{2\pi}} \right\rfloor$  までの自然数から求めることができるので, 大変効率が良くなっている.

## 9.4 付録 C.2. Riemann-Siegel lookalike formula

まず周期軌道が反射を含む双曲型でないような場合, Selberg 型のゼータ関数

$$\Delta(E) = \exp\{-i\pi \bar{N}(E)\} \prod_{\gamma} \prod_{k=0}^{\infty} \left[ 1 - \exp\left\{-\left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda_{\gamma} T_{\gamma}\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{\gamma}\right\} \right] \quad (C.2.1)$$

をディリクレ級数で表すことを考える. ここで, 作用  $S_{\gamma}$  は Maslov 指数と Billiards の場合の衝突回数を含むとする. オイラーの恒等式

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - ax^k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m (-1)^m x^{m(m-3)/4}}{(x^{-1/2} - x^{1/2})(x^{-1} - x) \cdots (x^{-m/2} - x^{m/2})} \quad (C.2.2)$$

を用いると

$$\Delta(E) = \exp\{-i\pi \bar{N}(E)\}$$

$$\times \prod_{\gamma} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \exp \left\{ -\frac{1}{4} m(m-1) \lambda_{\gamma} T_{\gamma} \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} m S_{\gamma} \right\} \left( \prod_{j=1}^m \det (M_{\gamma}^j - I) \right) \right]^{-1/2} \quad (C.2.3)$$

となる。素周期軌道についての積を展開して、

$$\Delta(E) = \exp \{ -i\pi \bar{N}(E) \} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(E) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_n(E) \right\} \quad (C.2.4)$$

を得る。ここで  $n$  は各素周期軌道  $\gamma$  が  $m_{\gamma}$  回繰り返されたものの組み合わせ  $n = \{m_{\gamma}\}$  を表しており、この組み合わせを Pseudo Orbits という。  $S_n$  は Pseudo Orbit  $n$  の作用

$$S_n \equiv \sum_{\gamma} m_{\gamma} S_{\gamma} \quad (C.2.5)$$

である。また係数  $C_n$  は

$$C_n \equiv \prod_{\gamma} \left[ (-1)^{m_{\gamma}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} m_{\gamma} (m_{\gamma} - 1) \lambda_{\gamma} T_{\gamma} \right\} \left( \prod_{j=1}^{m_{\gamma}} \det (M_{\gamma}^j - I) \right) \right]^{-1/2} \quad (C.2.6)$$

である。もし素周期軌道が反射を伴う双曲型であるときは、 $(-1)^{m_{\gamma}}$  を  $(-1)^{[(m_{\gamma}+1)/2]}$  とする。さて (2) から (11) を導いたのと同様に、(4) を 2 つの部分に分け、上手く resum できるならば結果は

$$\Delta(E) = 2 \sum_{n=0}^{T_n < T^*(E)} C_n(E) \cos \left\{ \frac{S_n(E)}{\hbar} - \pi \bar{N}(E) \right\} \quad (C.2.7)$$

となると考えられる。ここで  $T_n = \frac{dS_n(E)}{dE}$  であり、 $T^*(E)$  は

$$\frac{d}{dE} \left[ \frac{S(E)}{\hbar} - \pi \bar{N}(E) \right] = 0 \quad (C.2.8)$$

を満足するはずなので、

$$T^*(E) = \pi \hbar \frac{d}{dE} \bar{N}(E) = \frac{\hbar \bar{d}(E)}{2} \quad (C.2.9)$$

である ( $\bar{d}(E)$  は平均状態密度である)。これは、エネルギー  $E$  までの固有値を知りたいときには  $\frac{\hbar \bar{d}(E)}{2}$  の時間の情報があればよいという点で、不確定性原理と一貫した結論である。また、(1) が実関数であると仮定してもやはり (7) が導出される (Keating 1991)。

## 9.5 付録D. 撞球台からはみ出るような定常な多角形

(4.1.30) には  $-\pi < \varphi \leq \pi$  で考えると (4.1.31) の他に

$$\varphi(s_j^*, s_{j-1}^*) = \varphi(s_j^*, s_{j+1}^*) - \pi \quad (D.1)$$

という解も存在する。(D.1) は  $s_{j-1}, s_j, s_{j+1}$  が一直線上に並ぶことを意味している。このような線分と (4.1.31) を満足するような定常な多角形が存在するのは、 $A$  の境界  $\partial A$  に曲率の正の部分があることが必要である。そのとき、その多角形は  $A$  の境界  $\partial A$  と偶数回交差する。

2つの場合に分けて考える。まず (D.1) が続けて満たされる図 D.1 のような状況を考えることにする。図における  $s_{i_0}, s_{i_1}, s_{i_2}$  及び  $s_{i_3}$  の寄与を計算する。

幾何学的な考察から

$$\frac{\partial^2 l}{\partial s_{i_1}^2} = \cos^2(s_{i_1}, s_{i_2}) \left( \frac{1}{\tau_{i_1}} + \frac{1}{\tau_{i_2}} \right), \quad (D.2)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial s_{i_1} s_{i_2}} = \frac{\cos(s_{i_1}, s_{i_2}) \cos(s_{i_2}, s_{i_3})}{\tau_{i_2}} \quad (D.3)$$

を得る。

(4.1.28), (4.1.29) から  $\kappa(s_{i_1}) = 0$  とおくと (D.2), (D.3) となるので  $B(n)$  は (4.1.41) で  $\kappa(s_{i_1}) = 0$  として求めることができる。

境界を横切るこのような定常な多角形の一部である線分に対して  $s_{i_0}, \dots, s_{i_3}$  には次のような4通りの異なる配置の仕方がある。

$$s_{i_0} = s_j, s_{i_1} = s_{j+1}, s_{i_2} = s_{j+2}, s_{i_3} = s_{j+3} \quad (D.4)$$

$$s_{i_0} = s_j, s_{i_1} = s_{j+1}, s_{i_3} = s_{j+2} \quad (D.5)$$

$$s_{i_0} = s_j, s_{i_2} = s_{j+1}, s_{i_3} = s_{j+2} \quad (D.6)$$

$$s_{i_0} = s_j, s_{i_3} = s_{j+1} \quad (D.7)$$

例えば (D.4) の場合には

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau_{i_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\tau_{i_1}\kappa_{i_0}}{\cos \varphi_{i_0}} & \tau_{i_1} \\ \frac{2\kappa_{i_0}}{\cos \varphi_{i_0}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2(\tau_{i_1} + \tau_{i_2})\kappa_{i_0}}{\cos \varphi_{i_0}} & \tau_{i_1} + \tau_{i_2} \\ \frac{2\kappa_{i_0}}{\cos \varphi_{i_0}} & 1 \end{pmatrix} \quad (D.8)$$

という関係が得られる。これから  $s_{i_0}, s_{i_1}, s_{i_2}$  及び  $s_{i_3}$  の配置の仕方に関わらず (4.1.23) は  $\sigma$  を除いて等しいことが分かる。ところで (4.1.18) にこれらを代入すると配置の仕方で  $-1$  のべきの指数が変わる。(D.7) の配置のとき  $-1$  のべきの指数が  $N$  であれば、(D.4) の配置のときには指数は  $N+2$  であり、(D.5), (D.6) の配置のときには  $N+1$  である。したがって  $\sigma$  が配置によらず等しければこれらの寄与は相殺することが分かる。

$W$  は対称行列であるから二次超曲面の理論が適用することができるので  $\sigma$  は列

$$1, V(1), V(2), \dots, V(N), \det W(N+1) \quad (D.9)$$

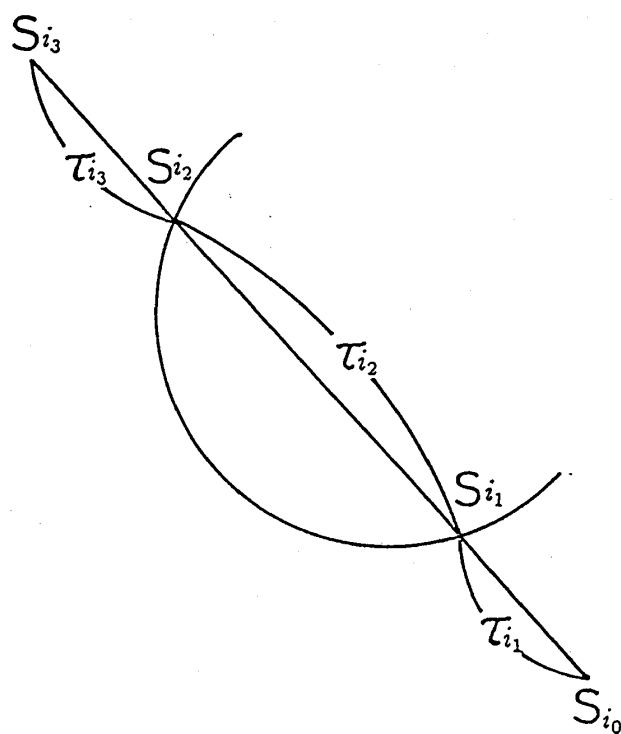


図 D.1. 式 (D.1) が  $S_{i_1}$  と  $S_{i_2}$  で満足される場合.

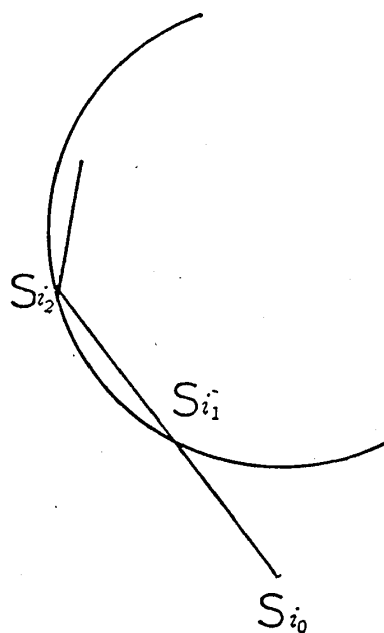


図 D.2. 式 (D.1) が  $S_{i_1}$  で満足され, 式 (4.1.31) が  $S_{i_2}$  で満足される場合.



の符号変化の個数に等しい。ここで

$$V(k) = \left( \prod_{j=n-k+1}^n \frac{\cos^2 \varphi(s_j^*, s_{j+1}^*)}{\tau(s_j^*, s_{j+1}^*)} \right) (-1)^k \frac{1}{\tau_{n-kn-k+1}} (\tilde{M}_n M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_{n-k})_{12} \quad (D.10)$$

である。

(D.4) の場合には

$$\begin{aligned} & \left( (\tilde{M}_n M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_{i_2+1}) \left[ - \begin{pmatrix} 1 & \tau_{i_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right)_{12} \\ &= - \left[ (\tilde{M}_n M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_{i_2+1})_{11} \tau_{i_2} + (\tilde{M}_n M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_{i_2+1})_{12} \right] \end{aligned} \quad (D.11)$$

である。

配置の仕方が (D.7) となるとき  $\sigma$  は  $V(i_0)$  と  $V(i_3)$  での符号変化に依存する。また配置の仕方が (D.4), (D.5), (D.6) となるときには  $\sigma$  を決める列には  $V(i_0)$  と  $V(i_3)$  の間に  $V(i_1)$  と  $V(i_2)$  があり,  $\sigma$  はこれらの符号変化の回数で決まる。ところで (D.10), (D.11) より列

$$V(i_0), V(i_1), V(i_2), V(i_3)$$

は単調増加, 或いは単調減少のどちらかしか有り得ないことが分かるので符号変化は  $V(i_0)$  と  $V(i_3)$  との間で高々 1 度である。したがって (D.4)~(D.7) の配置はすべて同じ  $\sigma$  の値を与える。

次に (D.1) に続いて (4.1.31) を満たす図 D.2 のような場合を考える。このとき  $k(s_{i_2})$  は負となるが幾何学的考察から (4.1.41) を用いてよい。このような部分を持つ定常な多角形では  $s_{i_0}, s_{i_1}, s_{i_2}$  の配置の仕方は

$$s_{i_0} = s_j, s_{i_1} = s_{j+1}, s_{i_2} = s_{j+2} \quad (D.12)$$

$$s_{i_0} = s_j, s_{i_2} = s_{j+1} \quad (D.13)$$

の 2 通りあるがこれらは先に述べた場合と同様に (4.1.23) において符号が反対となるので相殺する。

以上により撞球台からはみ出るような定常な多角形の  $\Delta(E)$  に対する寄与は考えなくてよいことが分かる。したがって (4.1.23) では撞球系の周期軌道となるような定常な  $n$  角形  $s_1^* s_2^* \cdots s_n^*$  についての和を取ればよいことが分かる。

## 9.6 付録E. トポロジカルエントロピー

出発点に戻るまでの壁との衝突回数を決めたときその衝突回数 ( $n$  とする) の周期軌道の長さの分布はガウス分布

$$P_n(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma}} \exp\left(-\frac{(l - \bar{l}n)^2}{2\sigma^2 n}\right) \quad (E.1)$$

に一致する. また, 衝突回数が  $n$  回以下の周期軌道の個数は指数関数  $\text{const} \times e^{\beta n}$  で良く近似出来る. ここでは  $l$  が十分大きいところで定常位相近似を用いて  $N(n)$  と  $P_n(l)$  とから  $N(l)$  を  $\exp(h')$  という形で求めることが出来ることを示す. 長さが  $l$  と  $l + dl$  との間にあるような周期軌道の個数は

$$\frac{dN(l)}{dl} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(l) N(n) \approx \text{const} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma}} \exp\left(-\frac{(l - \bar{l}n)^2}{2\sigma^2 n}\right) e^{\beta n} \quad (E.2)$$

である.  $n$  が十分大きいところでは和を鞍点法で評価して

$$\frac{dN(l)}{dl} \approx \text{const} \times \exp h' \quad (E.3)$$

を得る. ここで

$$h' = \frac{1}{\sigma^2} \left( \bar{l} - \sqrt{\bar{l}^2 - 2\sigma^2\beta} \right) \quad (E.4)$$

である.

## 10 参考文献

- Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (eds) 1964 Handbook of Mathematical functions (Washington: U.S. National Bureau of Standards)
- Adachi, S. 1989 Ann. Phys. 195, 45
- Adachi, S. private communication
- Aleksev, V.M. & Yakobson M.V. 1981 Phys. Rep. 75, 287
- Argaman, N., Doron, E., Keating, J., Kitaev, A., & Smilansky, U. 1992 preprint
- Arnol'd, V.I. & Avez, A. 1968 Ergodic Problems of Classical Mechanics (Benjamin, NY)
- Arnol'd, V.I. 1978 Mathematical Methods of Classical Mechanics (Springer, NY)
- Aurich, R., Bogomolny, E.B. & Steiner, F. 1991 Physica 48D, 91
- Aurich, R., Matthies, C., Sieber, M. & Steiner, F. 1992 Phys. Rev. Lett. 68, 1629
- Balian, R. & Bloch, C. 1972 Ann. Phys. 69, 76
- Balian, R. & Bloch, C. 1974 Ann. Phys. 85, 514
- Berry, M.V. & Wilkinson, M. 1984 Proc. R. Soc. Lond. A 392, 15
- Berry, M.V. 1983 Chaotic Behavior of Deterministic Systems (Les Houches Lectures 36) 453
- Berry, M.V. 1985 Proc. R. Soc. Lond. A 400, 229
- Berry, M.V. 1986 Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics (Lecture Notes in Physics no. 263), pp.1-17
- Berry, M.V. 1987 Proc. R. Soc. Lond. A 413, 183
- Berry, M.V. 1991 in: Chaos and Quantum Physics, eds. Giannoni, M.J., Voros, A., & Zinn-Justin, J. (Elsevier, Amsterdam)
- Berry, M.V. & Keating, J. 1990 J. Phys. A 23, 4839
- Berry, M.V. & Mount, K.E. 1972 Rep. Prog. Phys. 35, 315
- Berry, M.V. & Tabor, M. 1977 Proc. R. Soc. Lond. A 356, 375
- Bogomolny, E.B. 1988 Physica 31D, 169
- Bogomolny, E.B. 1992 Nonlinearity 5, 805
- Bohigas, O. & Giannoni, M.J. 1984 Lecture Notes in Physics pp.1-99
- Bohigas, O., Giannoni, M.J. & Schmit, C. 1984 Phys. Rev. Lett. 52, 1
- Boldrighini, C., Keane, M. & Marchetti, F. 1978 Ann. Prob. 6, 532
- Bunimovich, L.A. 1989 Dynamical Systems II (ed. Sinai, Ya.G.) (Springer), 151
- Bunimovich, L.A., Sinai, Ya.G. & Chernov, N.I. 1990 Russ. Math. Surv. 45, 105
- Bunimovich, L.A. & Sinai, Ya.G. 1980a Commun. Math. Phys. 73, 247
- Bunimovich, L.A. & Sinai, Ya.G. 1980b Commun. Math. Phys. 73, 247
- Bunimovich, L.A. & Sinai, Ya.G. 1986 Commun. Math. Phys. 107, 357
- Chen, Q., Meiss, J.D. & Percival, I.C. 1987 Physica 29D, 143
- Creagh, S.C., Robbins, J.M. & Littlejohn, R.G. 1990 Phys. Rev. A 42, 1907
- Cvitanovic, P. & Eckhardt, B. 1989 Phys. Rev. Lett. 63, 823
- Delos, J.B. 1986 Adv. Chem. Phys. 65, 161

- Eckhardt, B. & Aurell, E. 1989 *Europhys. Lett.* 9, 509
- Edwards, H.M. 1974, *Riemann's Zeta Function*(Academic Press New York and London)
- Einstein, A 1917 *Verh. Dtsch. Phys. Ges.* 19, 82
- Fröman, N & Fröman, P.O. 1966 *The JWKB Approximation; Contributions to the Theory* (North-Holland, Amsterdam)
- Gallavotti, G. & Ornstein, G. 1974 *Commun. Math. Phys.* 38, 83
- Gaspard, P. & Rice, S.A. 1989a *J. Chem. Phys.* 90, 2225
- Gaspard, P. & Rice, S.A. 1989b *J. Chem. Phys.* 90, 2242
- Gaspard, P. & Rice, S.A. 1989c *J. Chem. Phys.* 90, 2255
- Gutkin, E. 1986 *Physica* 19D, 311
- Gutzwiller, M.C. 1967 *J. Math. Phys.* 8, 1979
- Gutzwiller, M.C. 1968 *J. Math. Phys.* 10, 1004
- Gutzwiller, M.C. 1970 *J. Math. Phys.* 11, 1791
- Gutzwiller, M.C. 1971 *J. Math. Phys.* 12, 343
- Gutzwiller, M.C. 1977 *J. Math. Phys.* 18, 806
- Gutzwiller, M.C. 1982 *Physica* 5D, 183
- Harayama, T. & Shudo, A. 1992a *J. Phys. A: Math. Gen.* 25, 4595
- Harayama, T. & Shudo, A. 1992b *Phys. Lett. A* 165, 417
- Harayama, T., Shudo, A. & Shimizu, Y. , to be published
- 長谷川 洋 1991 *物理学最前線* 28 (共立出版)
- Heller, E.J., O'Connor, P.W. & Gehlen, 1989 *J. Physica Scripta* 40, 354
- Ikawa, M. Osaka 1990 *J. Math.* 27, 281-300
- Ikeda, K. 1992 preprint YITP/K-982
- 鹿野 健 1991 *リーマン予想* (日本評論社)
- Keating, J. 1991a *Nonlinearity* 4, 277
- Keating, J. 1991b *Nonlinearity* 4, 309
- Keating, J. 1991c *Quantum Chaos* (ed. Cerderia, H.A., Ramaswamy, R., Gutzwiller, M.C. & Casati, G.) (World Scientific, Singapore)
- Keating, J. 1992 *Proc. R. Soc. Lond. A* 436, 99
- 久保泉 1973 *撞球問題* (確率論セミナー, 名古屋大学)
- Machta, J. 1983 *J. Stat. Phys.* 32, 555
- Mackay, R.S. & Miess, J.D. 1983 *Phys. Lett. A* 98, 92
- Mackay, R.S. & Miess, J.D. 1987 *Hamiltonian Dynamical Systems.* (Adam Hilger)
- Maslov, V.P. & Fedoriuk, N.V. 1981, *Semiclaasical Approximations in Quantum Mechanics* (Reidel, Dordrecht)
- Montgomery, H.L. 1973 *Proc. Symp. Pure. Math.* 24, 181
- Morita, T. 1991 *Trans. A. M. S.* 325, 819
- O'Connor, P.W. & Tomsovic, S. 1991 *Ann.Phys.* 207, 218
- Ozorio de Almeida, A.M. & M. Saraceno, 1991 *Ann. Phys.* 210, 1
- Parry, W & Pollicott, M 1983 *Ann. of Math.* 118, 573

- Percival, I.C. 1977 Adv. Chem. Phys. 36, 1  
 Percival, I.C. 1987 Proc. R. Soc. Lond. A 413, 131  
 Richens, R.J. & Berry, M.V. 1981 Physica 2D, 495  
 Riddell Jr, R.J. 1979 J. Comp. Phys. 31, 21  
 Robbins, J.M. 1991 Nonlinearity 4, 343  
 Sepúlveda, M.A., Tomsovic, S. & Heller, E.J. 1992 Phys. Rev. Lett. 69, 404  
 清水寧 & 原山卓久 1993, 物性研究 Vol.59 No.6  
 Shudo, A. 1992 Phys. Rev. A 46, 802  
 Shudo, A. & Shimizu, Y. 1992 preprint  
 Shudo, A. & Ikeda, K. , to be published  
 Sieber, M. & Steiner, F. 1990a Physica 44D, 248  
 Sieber, M. & Steiner, F. 1990b Phys. Lett. A 144, 415  
 Sieber, M. & Steiner, F. 1990c Phys. Lett. A 144, 159  
 Sinai, Ya.G. 1970 Russ. Math. Surv. 25, 137  
 Sinai, Ya.G. 1976 An introduction to ergodic theory (Moscow: Erivan(Lecture 10))  
 砂田利一 1988 基本群とラブラシアン (紀伊國屋書店)  
 Tomsovic, S. & Heller, E.J. 1991 Phys. Rev. Lett. 67, 664  
 Voros, A. 1988 J. Phys. A 21, 685